УДК 51-7

П. Н. Победаш, Г. А. Липина, Е. Н. Грибанов
Кузбасский государственный технический университет
им. Т. Ф. Горбачева, Кемерово, Россия

О ВЫВОДЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В данной статье предлагается новый методический подход к получению формулы Тейлора, основанный лишь на понятии дифференцируемости функции одной переменной в некоторой фиксированной точке, т.е. без предположения ее интегрируемости на заданном интервале. При этом используется асимптотическое представление Стирлинга для факториала больших значений аргумента и второй замечательный предел. Предлагаемый авторами подход не является полностью строго обоснованным, однако может рассматриваться в качестве наводящих рассуждений к получению указанной выше формулы. Это позволяет предложить альтернативный вариант изложения данной темы (помимо существующего на сегодня) в рамках курса высшей математики, не использующий интегрального исчисления, излагая по-новому данный раздел и, следовательно, по-другому (независимо от интегрального исчисления) выстраивая структуру всего курса высшей математики. Данный подход несложно, рассуждая по аналогии, распространить на функцию нескольких переменных. При этом понятие производной, очевидно, заменяется на понятие частной производной.

Ключевые слова: дифференцируемая функция, формула Тейлора, формула Стирлинга, второй замечательный предел

Пусть $f(x)$ - дифференцируемая функция в окрестности точки $x_0 \in [a,b]$, то есть существует производная

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (1)$$

Из (1) следует, что при $\Delta x \approx 0$ выполняется приближенное соотношение $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, откуда получим

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \Delta x \approx 0. \qquad (2)$$

Рассуждая аналогично, запишем

$$f(x_0 + 2\Delta x) \approx f(x_0 + \Delta x) + f'(x_0 + \Delta x)\Delta x, \Delta x \approx 0. \qquad (3)$$

С другой стороны, если функция $f'(x)$ также дифференцируема в точке $x_0+\Delta x$, то есть существует $f''(x_0+\Delta x)$, заменяя в (2) функцию $f(x)$ на $f'(x)$, а $f'(x)$ на $f''(x)$, найдем:

$$f'(x_0+\Delta x)\approx f'(x_0)+f''(x_0)\Delta x,\ \Delta x\approx 0. \tag{4}$$

Тогда, подставляя (2) и (4) в правую часть (3), получим:

$$f(x_0+2\Delta x)\approx f(x_0+\Delta x)+\left[f'(x_0)+f''(x_0)\Delta x\right]\Delta x=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+f'(x_0)\Delta x+$$
$$+f''(x_0)\Delta x^2=f(x_0)+2f'(x_0)\Delta x+f''(x_0)\Delta x^2.$$

Таким образом,

$$f(x_0+2\Delta x)\approx f(x_0)+2f'(x_0)\Delta x+f''(x_0)\Delta x^2,\ \Delta x\approx 0. \tag{5}$$

Обобщая формулы (2) и (5), запишем:

$$f(x_0+n\Delta x)\approx\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x_0)\Delta x^k,\ \Delta x\approx 0\ (n=0,1,\ldots)\,. \tag{6}$$

Докажем формулу (6) индукцией по *n*. При $n=0$ из указанной формулы получим при любом x тождественное равенство: $f(x_0)=f(x_0)$, которое, в частности, верно и при $\Delta x\approx 0$. Предположим, что данная формула справедлива при некотором *n*.Тогда по формуле (2) имеем:

$$f(x_0+[n+1]\Delta x)=f([x_0+n\Delta x]+\Delta x)\approx f(x_0+n\Delta x)+f'(x_0+n\Delta x),$$
$$\Delta x\approx 0. \tag{7}$$

С другой стороны, по предположению математической индукции, заменяя в (6) $f(x)$ на $f'(x)$, найдем:

$$f'(x_0+nx)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(f'(x)\right)\Big|_{x=x_0}^{(k)}\cdot\Delta x^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k+1)}(x_0)\Delta x^k,\Delta x\approx 0\,. \tag{8}$$

Подставляя формулы (6) и (8) в (7), запишем:

$f(x_0+[n+1]\Delta x)\approx\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x_0)\Delta x^k+\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k+1)}(x_0)\Delta x^{k+1}$. Сделаем во второй сумме в правой части последней формулы замену: *m=k+1*, откуда следует *m=1,…,n+1, k=m-1*. Тогда

$$f\left(x_0+[n+1]\Delta x\right)\approx\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}\left(x_0\right)\Delta x^k+\sum_{m=1}^{n+1}C_n^{m-1}f^{(m)}\left(x_0\right)\Delta x^m=C_n^0 f^{(0)}\left(x_0\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k+C_n^{k-1}\right)f^{(k)}\left(x_0\right)\Delta x^k+C_n^n f^{(n+1)}\left(x_0\right)\Delta x^{n+1}$$

Учитывая, что

$$C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k \quad \left(k=0,1,..n;\ n\in\{0,1,..\}\right), \tag{9}$$

получим:

$$f\left(x_0+[n+1]\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k f^{(k)}\left(x_0\right)\Delta x^k+f^{(n+1)}\left(x_0\right)\Delta x^{n+1},\ \Delta x\approx 0\,.$$

Поскольку $\Delta x^0=1, C_{n+1}^0=1, C_{n+1}^{n+1}=1$, то последнюю формулу перепишем в следующем виде:

$f\left(x_0+[n+1]\Delta x\right)\approx\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k f^{(k)}\left(x_0\right)\Delta x^k,\ \Delta x\approx 0$. Таким образом, получили формулу (6) при $n+1$, что и доказывает её, согласно методу математической индукции. Далее, обозначая $x=x_0+n\Delta x,(n>0)$, получаем

$$\Delta x=\frac{x-x_0}{n}. \tag{10}$$

Тогда формулу (6) представим в виде:

$$f(x)\approx\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x_0)\left(\frac{x-x_0}{n}\right)^k,\ \Delta x\approx 0. \tag{6*}$$

Отметим, что (6), а значит и (6*) является приближенным равенством в силу приближенного соотношения (2), которое получено при замене условия $\Delta x\to 0$ в (1) на условие $\Delta x\approx 0$. Поэтому, полагая в (6*) $\Delta x\to 0\Leftrightarrow n\to\infty$ вместо $\Delta x\approx 0$, получим формально точное равенство:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x_0)\left(\frac{x-x_0}{n}\right)^k, \tag{11}$$

Откуда следует, что

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k. \tag{11*}$$

Поскольку справедлива асимптотическая формула Стирлинга [1]:

$$n! \underset{n\to\infty}{\approx} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad (12)$$

или в предельной форме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1, \qquad (12^*)$$

то

$$(n-k)! \underset{n\to\infty}{\approx} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)}, \qquad (13)$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-k)!}{\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)}} = 1. \qquad (13^*)$$

Здесь применяется понятие асимптотической эквивалентности функций *h(x)* и *g(x)*, означающее следующее соотношение:

$$h(x) \underset{n\to\infty}{\approx} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 1$$

В силу (12*) и (13*)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^k}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{k!\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)}n^k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^k \frac{k}{k!n^k} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{n-k}}{\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} \sqrt{\frac{n}{n-k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-k}}{k!} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-k}}{k!} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right)^{n-k} = \frac{e^{-k}}{k!} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{k}{n-k}(n-k)} = \frac{e^{-k}e^k}{k!} = \frac{1}{k!}, \text{ то есть}$$

$$C_n^k \underset{n\to\infty}{\approx} \frac{n^k}{k!} \qquad (k\to\infty) \tag{14}$$

Здесь использован второй замечательный предел [1]. Тогда, с учетом соотношения (14), перепишем равенство (11*) в виде:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

Если существует предел суммы в правой части последнего соотношения, то по определению получим формулу

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k , \tag{15}$$

ставящую в соответствие бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ ряд Тейлора в точке x_0. Данные рассуждения являются лишь наводящими на вывод формулы (20), не касаясь условий сходимости (существования) ряда Тейлора в заданной точке x_0. При выводе формулы (15) используется формула Стирлинга и второй замечательный предел, но не используется понятие интегрирования (и уж тем более, формула интегрирования по частям), а применяется многократно соотношение (2), (вытекающее из определения производной). Это позволяет предложить альтернативный вариант изложения данной темы (помимо существующего на сегодня) в рамках курса высшей математики, не использующий интегрального исчисления, излагая по-новому данный раздел и, следовательно, по-другому (независимо от интегрального исчисления) выстраивая структуру всего курса высшей математики. Данный подход несложно, рассуждая по аналогии, распространить на функцию нескольких переменных. При этом понятие производной, очевидно, заменяется на понятие частной производной.

Следует отметить также, что в рамках высшей математики вместо приближенного соотношения (2), более естественно использовать точное равенство, являющееся определением дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{16}$$

где $\alpha(\Delta x)$-бесконечно-малая относительно Δx, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Однако, применение формулы (16) вместо (2) усложнит вывод формулы (15) при условии, что $\Delta x \to 0$, хотя и сделает его более строгим.

Библиографический список

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3т. Т.1. – М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.

P. N. Pobedash, G. A. Lipina, E. N. Gribanov,
T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russia

ABOUT THE CONCLUSION OF TAYLOR'S FORMULA WITHOUT APPLICATION OF INTEGRATED CALCULATION

This article proposes a new methodical approach to obtaining the Taylor formula, based only on the notion of differentiability of a function of one variable at some fixed point, i.e. without assuming its integrability in a given interval. It uses the asymptotic Stirling representation for the factorial of large values of the argument and the second remarkable limit. The approach proposed by the authors is not fully strictly justified, however, it can be considered as a suggestive argument for obtaining the above formula. This allows us to offer an alternative version of the presentation of this topic (besides the one existing today) in the framework of the course of higher mathematics, which does not use integral calculus, presenting this section in a new way and, therefore, differently (regardless of integral calculus) building the structure of the whole course of higher mathematics . This approach is simple, reasoning by analogy, to extend to the function of several variables. In this case, the concept of a derivative is obviously replaced by the concept of a partial derivative.

Key words: differentiable function, Taylor formula, Stirling formula, second remarkable limit.