УДК 519.86

**П. Н. Победаш, Е. Н. Грибанов, Г. А. Липина**
*Кузбасский государственный технический университет им. Т.Ф. Горбачева, Кемерово, Россия*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВАЛОВОГО ВЫПУСКА В МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА-ХИКСА ДЛЯ КРАТНОГО КОРНЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной статье предлагается новый подход к решению разностных уравнений первого и второго порядка, описывающих модель Самуэльсона-Хикса для случая, когда характеристическое уравнение (соответствующее уравнению динамики валового выпуска), представляющее собой квадратное уравнение, имеет кратный корень. Указанная модель включает уравнения динамики трех экономических показателей – инвестиций, потребления и валового выпуска, и используется при описании колебаний деловой активности и управления национальной экономикой. Исключая первые два из этих показателей, придем к уравнению динамики валового выпуска, являющемуся неоднородным разностным уравнением второго порядка. Предложенный подход позволяет свести это уравнение к соответствующему однородному, которое, в свою очередь, путем замены переменной сводится к последовательному решению двух вспомогательных разностных уравнений первого порядка. Подстановка найденного решения уравнения динамики валового выпуска во второе и третье (представляющее собой балансовое соотношение для перечисленных выше экономических показателей) уравнения модели Самуэльсона-Хикса дает возможность определить выражения для инвестиций и потребления.

***Ключевые слова:*** валовый выпуск, модель Самуэльсона-Хикса, разностное уравнение, характеристическое уравнение

В статье предлагается новый подход к исследованию следующей математической модели, описываемой разностными уравнениями (РУ):

$$I^{t+2} = \nu(Y^{t+1} - Y^{t}),\ t = 0,1,..., \tag{1}$$

$$C^{t+1} = aY^{t} + b,\ t = 0,1,..., \tag{2}$$

$$Y^{t} = I^{t} + C^{t},\ t = 0,1,... \tag{3}$$

Здесь экономические показатели $I^t$, $Y^t$ и $C^t$ – это инвестиции, валовый выпуск и потребление в период $t$ соответственно, а параметры $\nu > 0$ – это фактор акселерации, $0 < a < 1$ – склонность к потреблению, $b > 0$ – базовое потребление. Модель (1)-(3) описывает колебания деловой активности и национальную экономику, и называется моделью Самуэльсона-Хикса [1, 2].

Подстановка уравнений (1) и (2) в условие баланса (3) приводит к уравнению валового выпуска вида

$$Y^{t+2} = (a+\nu)Y^{t+1} - \nu Y^{t} + b,\ t = 0,1,\ldots, \tag{4}$$

являющемуся линейным неоднородным РУ второго порядка. В статье [3] был предложен подход для решения РУ (4), позволяющий свести его к решению РУ первого порядка в случае, когда корни характеристического уравнения (являющегося квадратным уравнением) различны. Рассмотрим указанный подход к решению линейного неоднородного РУ второго порядка, боле е общего, чем уравнение (4)

$$Y^{t+2} = A_0 Y^{t} + A_1 Y^{t+1} + B, \quad (t = 0,1,\ldots). \tag{5}$$

Для этого представим основные идеи данного подхода, приведенные в статье [3]. Сделаем замену

$$Y^{t} = Z^{t} + C, \quad \forall t \tag{6}$$

Здесь

$$C = \frac{B}{1-(A_0 + A_1)} \ (A_0 + A_1 \neq 1). \tag{7}$$

Тогда получаем линейное однородное РУ второго порядка

$$Z^{t+2} = A_0 Z^{t} + A_1 Z^{t+1}. \tag{8}$$

Произведем в уравнении (8) замену

$$W^{t} = Z^{t+1} - \lambda Z^{t}. \tag{9}$$

Здесь $\lambda = const$ - постоянная, удовлетворяющая характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - A_1\lambda - A_0 = 0. \tag{10}$$

Тогда получим РУ первого порядка следующего вида:

$$W^{t+1} = (A_1 - \lambda)W^{t}, \tag{11}$$

Уравнение (11) определяет геометрическую прогрессию со знаменателем $q = A_1 - \lambda$. При этом решение данного уравнения найдем по формуле $W^t = W^0 q^t = W^0 \left(A_1 - \lambda\right)^t \quad (t = 0,1,...)$. Принимая во внимание, что $W^0 = Z^1 - \lambda Z^0$ и условие (9), получим решение РУ (8) в виде

$$Z^{t+1} - \lambda Z^t = \left(Z^1 - \lambda Z^0\right)\left(A_1 - \lambda\right)^t \quad (t = 0,1,...). \tag{11'}$$

Для уравнения (10) исследуем оставшийся случай (не изученный в [3]), когда его дискриминант равен нулю:

$$D = A_1^2 + 4A_0 = 0, \qquad \text{.......(12)}$$

т.е. имеется единственный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{A_1}{2}$ – кратности 2. В этом случае (11') принимает вид:

$$Z^{t+1} - \left(\frac{A_1}{2}\right) \cdot Z^t = \left(Z^1 - \frac{A_1}{2} Z^0\right) \cdot \left(\frac{A_1}{2}\right)^t (t = 0,1,...). \qquad \text{......(11'')}$$

При этом $A_1 \neq 0$, поскольку в противном случае из (12) следует, что $A_1^2 + 4A_0 = 0$ Тогда $A_0 = 0$ и уравнение (8) принимает наиболее простой (вырожденный) вид: $Z^{t+2} = 0$. Деля $(11'')$ на выражение $\left(\frac{A_1}{2}\right)^{t+1}$, получаем:

$$\frac{Z^{t+1}}{\left(\frac{A_1}{2}\right)^{t+1}} - \frac{Z^t}{\left(\frac{A_1}{2}\right)^t} = \frac{Z^1 - \frac{A_1 Z^0}{2}}{\frac{A_1}{2}}$$

Тогда, полагая $R^t = \frac{Z^t}{\left(\frac{A_1}{2}\right)^t}$ для $\forall t$, запишем

$$R^{t+1} - R^t = \frac{2Z^1 - A_1 Z^0}{A_1} \Leftrightarrow R^{t+1} = R^t + \left(\frac{Z^1}{\frac{A_1}{2}} - Z^0\right) \quad (t = 0,1,...).$$

Далее, обозначая

$d = \frac{Z^1}{\left(\frac{A_1}{2}\right)} - Z^0 = \frac{2Z^1}{A_1} - Z^0$, перепишем полученное уравнение в виде:

$$R^{t+1} = R^t + d. \qquad (13)$$

РУ $(13)$ описывает арифметическую прогрессию со знаменателем $d$. При этом ее элементы задаются соотношением

$$R^t = R^0 + dt \;\; (t = 0,1,...). \qquad (14)$$

Учитывая, что $R^0 = Z^0$, из (14) получим

$\frac{Z^t}{\left(\frac{A_1}{2}\right)^t} = Z^0 + \left[\frac{Z^1}{\left(\frac{A_1}{2}\right)} - Z^0\right] t$, откуда следует, что

$$Z^t = \left(Z^0 + \left[\frac{Z^1}{\left(\frac{A_1}{2}\right)} - Z^0\right] t\right) \cdot \left(\frac{A_1}{2}\right)^t \qquad (t = 0,1,...),\; D = 0. \qquad (15)$$

Принимая во внимание, что, согласно (5), для РУ (4) коэффициенты $A_0 = -v$, $A_1 = a + v$, $B=b$, а также (6), (7), получим решение указанного уравнения в виде

$$Y^t = \left(Y^0 - \frac{b}{1-a} + \left[\frac{Y^1 - \frac{b}{1-a}}{\left(\frac{a+v}{2}\right)} - \left(Y^0 - \frac{b}{1-a}\right)\right] t\right) \cdot \left(\frac{a+v}{2}\right)^t + \frac{b}{1-a}\left(t = 0,1,...\right), D = 0. \qquad (15')$$

Используя уравнения (2) и (3), из формулы (15') нетрудно определить инвестиции и потребление.

Сделаем ряд замечаний об изложенном здесь подходе.

1) Поскольку $D = 0 \Leftrightarrow A_1^2 + 4A_0 = 0 \Rightarrow A_0 = \frac{-A_1^2}{4} < 0$, то $A_0 < 0$.

2) Подставляя выражение (7) в (6), запишем

$$Y^t = Z^t + \frac{B}{1-(A_0+A_1)} \quad (t=0,1,\ldots), A_0 + A_1 \neq 1. \tag{6'}$$

Если

$$A_0 + A_1 = 1, \tag{15''}$$

то $A_1 = 1 - A_0$ и РУ (5) равносильно уравнению $Y^{t+2} = A_0 Y^t + (1-A_0)Y^{t+1} + B$, что эквивалентно $Y^{t+2} - Y^{t+1} = -A_0\left(Y^{t+1} - Y^t\right) + B$. Пусть

$$X^t = Y^{t+1} - Y^t \; (t=0,1,\ldots). \tag{16}$$

Тогда последнее разностное уравнение сводится к РУ первого порядка:

$$X^{t+1} = -A_0 X^t + B \; (t=0,1,\ldots). \tag{17}$$

Далее, осуществляя в уравнении (17) замену в форме (6), т.е.

$$X^t = Z^t + C, \tag{18}$$

представим (17) в виде:

$$Z^{t+1} + C = -A_0\left(Z^t + C\right) + B \Leftrightarrow Z^{t+1} = -A_0 Z^t + \left[B - C(A_0+1)\right].$$

Выберем $C$ таким образом, чтобы $B - C(A_0+1) = 0$ или $C = \frac{B}{A_0+1}$ $(A_0 \neq -1)$.

Тогда

$$Z^{t+1} = -A_0 Z^t. \tag{17'}$$

Следовательно, $Z^t = (-A_0)^t Z^0$ и, с учетом (18),

$$X^t - C = (-A_0)^t\left(X^0 - C\right). \tag{17''}$$

В этом случае (18) имеет вид: $X^t = Z^t + \dfrac{B}{A_0+1}$ $\left(A_0 \neq -1, t = 0,1,...\right)$, или, с учетом (16), (17''),

$$Y^{t+1} - Y^t - \frac{B}{1+A_0} = (-A_0)^t\left(Y^1 - Y^0 - \frac{B}{1+A_0}\right)(t = 0,1,...). \tag{17'''}$$

При $A_0 = -1$ из (15'') следует $A_1 = 1 - A_0 = 2$. Тогда РУ (5) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &Y^{t+2} = -Y^t + 2Y^{t+1} + B \Leftrightarrow Y^{t+2} - 2Y^{t+1} + Y^t = B \Leftrightarrow \\ &Y^{t+2} - Y^{t+1} = Y^{t+1} - Y^t + B \Leftrightarrow R^{t+1} = R^t + B \quad \left(t = 0,1,...\right). \end{aligned} \tag{14'}$$

Здесь

$$R^t = Y^{t+1} - Y^t \quad \left(t = 0,1,...\right). \tag{19}$$

При этом $A_0 = -1, A_1 = 2$ и выполнено (12), т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Тогда из условий (14') имеем:

$$R^t = R^0 + Bt \quad \left(t = 0,1,...\right). \tag{20}$$

Из уравнений (19) и (20) получаем

$$Y^{t+1} - Y^t = Y^1 - Y^0 + Bt \quad \left(t = 0,1,...\right). \tag{21}$$

В итоге, разностное уравнение второго порядка (5) сводится к уравнениям первого порядка (17''') и (21).

**Библиографический список**

Математическая экономика на персональном компьютере. Под ред. М. Кубонива. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.

Мешечкин В.В., Победаш П.Н. О параметрическом анализе одной модели экономического роста. // Материалы Всероссийской научно-практической конференции "Информационные технологии и математическое моделирование". - Томск: ”Твердыня”, 2002. - С. 238-240.

Победаш П.Н., Трушникова Н.В. О решении уравнений в модели Самуэльсона-Хикса. // Международная научно-практическая конференция «Концепции устойчивого развития науки в современных условиях» / в 6 ч. Ч.3 – Стерлитамак: АМИ, 2017. – С. 17-20.

**P. N. Pobedash, E. N. Gribanov, G. A. Lipina**
*T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russia*

## DETERMINATION OF THE TOTAL YIELD IN THE SAMUELSON-HICKS MODEL FOR A MULTIPLE ROOT OF THE CHARACTERISTIC EQUATION

This article proposes a new approach to the solution of different equations of the first and second order, describing the Samuelson-Hicks model for the case when the characteristic equation (corresponding to the equation of the total yield dynamics), it is a square equation, it has a multiple root. This model includes the equations of dynamics of three economic indicators - investment, consumption and total yield, and the model is used in the description of business fluctuations and management of the national economy. Excluding the first and second two of preceding subjects, we shall come to the equation of the total yield dynamics, which is a heterogeneous difference equation of the second order. The proposed approach allows us to reduce this equation to the corresponding homogeneous one, which by replacing the variable and it is reduced to the sequential solution of two auxiliary difference equations of the first order. Substitution of the found solution of the equation of the total yield dynamics in the second and third ( it represents the balance ratio for the above economic indicators) the equation of the Samuelson-Hicks model makes it possible to determine the expression for investment and consumption.

**Key words:** the total yield, the Samuelson-Hicks model, difference equations, characteristic equations