УДК 51-7

Е. А. Николаева, Е. Н. Грибанов
Кузбасский государственный технический университет
им. Т. Ф. Горбачева, Кемерово, Россия

МОДЕЛЬ РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ С БЕЗРИСКОВОЙ БУМАГОЙ

В данной работе рассмотрен случай, когда инвестор может наряду с покупкой рисковых ценных бумаг делать вложения, не связанные с риском (приобретать безрисковые ценные бумаги). Построена статическая математическая модель рынка с безрисковой ценной бумагой, описана задача инвестора, в виде оптимизационной задачи, в которую дополнительно введены условия, связанные с ограниченной возможностью приобретения ценных бумаг. С помощью функции Лагранжа и необходимых условий оптимальности найден оптимальный портфель инвестора. Определено понятия спроса, предложения инвестора и понятие равновесного состояния на рынке с безрисковой ценной бумагой. Доказано существования равновесного состояния на рынке с безрисковой ценной бумагой. Доказано необходимое условие существования равновесного состояния на рынке с безрисковой ценной бумагой.

Ключевые слова: рынок ценных бумаг, ценная бумаг, доходность, риск, портфель ценных бумаг, безрисковая ценная бумага.

Рассмотрим рынок ценных бумаг (k видов рисковых ценных бумаг), на котором существует безрисковая ценная бумага. Дополнительно отметим, что доходность вложений в безрисковые ценные бумаги, вообще говоря, меньше, чем средняя доходность при вложении средств в рисковые бумаги и она не зависит от состояния самого рынка.

Опишем статическую модель рынка ценных бумаг с безрисковой бумагой. Для этого введем следующие обозначения: m_0 - доходность безрисковой ценной бумаги, x_0^i - доля безрисковой части портфеля инвестора i.

Для безрисковой ценной бумаги дисперсия $D[m_0]=0$, математическое ожидание $E[m_0]=m_0$, а ковариация $\mathrm{cov}(m_0, m_j)=0$, для любого вида рисковой ценной бумаги ($j=1,\ldots,k$).

Мы рассматриваем рынок ценных бумаг, на котором существует лишь одна безрисковая ценная бумага, а все остальные бумаги рисковые и, следовательно, рисковые бумаги имеют ненулевую дисперсию $D\lfloor m_j \rfloor > 0, j = 1,..,k$. Портфель $x = \left(x_0^i, x_1^i, ..., x_m^i\right)$ инвестора i с безрисковой ценной бумагой при условии $x_0^i \neq 1$ можно разложить в линейную комбинацию безрискового и рискового портфеля

$$x^i = x_0^i e_0 + \left(1 - x_0^i\right) y_0^i, \tag{1}$$

где $e_0 = (1,0,...,0)$- безрисковый портфель, а

$$y_0^i = \left(0, \frac{x_1^i}{1 - x_0^i}, ..., \frac{x_k^i}{1 - x_0^i}\right)$$

- портфель, не содержащий безрисковой бумаги.

Пусть C - матрица ковариаций рисковых бумаг. Заметим, что полная матрица ковариаций для всех ценных бумаг, включая безрисковую, имеет вид:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 \,......0 \\ \vdots \quad C \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. наличие безрисковой ценной бумаги в портфеле влечет вырожденность ковариационной матрицы.

Так как любой портфель с безрисковой ценной бумагой можно разложить на безрисковую и рисковую части, и риск безрисковой ценной бумаги и связанные с ней ковариации равны нулю, то задача инвестора в случае, когда на рынке присутствует безрисковая ценная бумага имеет вид:

$$\sigma^i(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{kj} x_k^i x_j^i \longrightarrow \min \tag{2}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j^i + x_0^i = 1, & (3) \\ \sum_{j=1}^{m} m_j x_j^i + m_0 x_0^i \geq \overline{m}^i, & (4) \\ x_j^i K^i \big/ p_j \leq \alpha_j^i a_j, j = 0,1,\ldots,k, 0 \leq \alpha_j^i \leq 1 & (5) \\ x_j^i \geq 0, j = 0,1,\ldots,k. & (6) \end{cases}$$

Здесь c_{kj} - элемент матрицы ковариации C для рисковых ценных бумаг, m_j - ожидаемое значение доходности по бумаге вида j, $\overline{m}^i$ - фиксированный уровень доходности, который рассчитывает получить инвестор i. Модель (2)-(6) обозначим Ω_i^0.

Исследуем статическую математическую модель рынка с безрисковой ценной бумагой в виде совокупности

$$\Omega^0 = \left\langle N, \left\{\Omega_i^0\right\}_{i \in N}, W^0 \right\rangle, \tag{7}$$

где $N = \{1,\ldots,n\}$ - множество участников рынка, Ω_i^0, - модель инвестора i, $i = 1,\ldots,n$, а символом W^0 обозначены условия замкнутости рынка:

$$\sum_{i=1}^{n} x_j^i K^i \big/ p_j = a_j, \quad j = 0,1,\ldots,k. \tag{8}$$

Здесь K^i - инвестиционный фонд инвестора i, p_j - цена единицы ценной бумаги вида $j=0,1,...k$, a_j - количество бумаг вида j на рынке, x_j^i - компонента j портфеля инвестора i. Общее количество всех видов ценных бумаг на рынке равно $m+1$.

Вектор $x^i = \left(x_0^i, x_1^i, \ldots, x_m^i\right)$, компоненты которого удовлетворяют следующим условиям $\sum_{j=0}^{m} x_j^i = 1, \quad x_j^i \geq 0, \quad j = 0,1,\ldots,k$ назовем портфелем инвестора i с безрисковой бумагой.

Вектор $\bar{x}^i = \left(\bar{x}_0^i, \bar{x}_1^i, \ldots, \bar{x}_m^i\right)$, являющийся решением задачи (2)-(6), будем называть оптимальным портфелем инвестора *i* с безрисковой бумагой.

Будем говорить, что на рынке Ω_i^0 с безрисковой бумагой существует равновесие, если для всех состояний $x = \left\{x^1, x^2, \ldots, x^n\right\}$, удовлетворяющих (3)-(7) выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{n} K^i c_-^i\left(x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} K^i c_+^i\left(x^i\right), \tag{9}$$

где

$$c_-^i\left(x^i\right) = \left(-\min\left\{\overline{x}_0^i - x_0^i, 0\right\}, -\min\left\{\overline{x}_1^i - x_1^i, 0\right\}, \ldots, -\min\left\{\overline{x}_k^i - x_k^i, 0\right\}\right) \tag{10}$$

- вектор предложения инвестора *i*, а

$$c_+^i\left(x^i\right) = \left(\max\left\{\overline{x}_0^i - x_0^i, 0\right\}, \max\left\{\overline{x}_1^i - x_1^i, 0\right\}, \ldots, \max\left\{\overline{x}_k^i - x_k^i, 0\right\}\right) \tag{11}$$

- вектор спроса инвестора *i*.

Для рынка Ω_i^0 справедливы следующие утверждения, сформулированные в виде теорем.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

$$\min\left\{m_0, m_1, \ldots, m_k\right\} \le \overline{m}^i \le \max\left\{m_0, m_1, \ldots, m_k\right\},$$

$$K^i \le \max_{\gamma \in \Gamma^i} \sum_{j=0}^{k} \gamma_j a_j p_j$$

и оптимальные портфели инвесторов лежат на границе областей (4). Тогда на рынке Ω_i^0 с безрисковой ценной бумагой существует равновесное состояние.

Теорема 2. Для того чтобы последовательность оптимальных портфелей $\bar{x} = \left\{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n\right\}$ была состоянием равновесия на рынке Ω_i^0, необходимо, чтобы $\bar{x}$ удовлетворяла условию замкнутости рынка.

Теорема 3. Для того, чтобы последовательность оптимальных портфелей $\bar{x} = \{\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^n\}$ была состоянием равновесия на рынке Ω_i^0, достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\bar{V} \neq \varnothing$; 2) $\bar{x} \in \bar{V}$.

Содержательно $\bar{V}^i$ есть множество последовательностей $\{y^1,..,y^{i-1}, y^{i+1},..,y^n\}$, составленных из портфелей инвесторов $l \in N \setminus i$, которые вместе с оптимальным портфелем $\bar{x}^i$ инвестора *i* удовлетворяют условию замкнутости. Обозначим $\bar{V} = \bigcap_{i\in N} \bar{V}^i$.

Вычислим оптимальный портфель с безрисковой ценной бумагой инвестора *i*. Пусть ковариационная матрица *C* невырожденна и, следовательно, существует обратная матрица C^{-1}. Найдем решение “усеченной” задачи:

$$\sigma^i(x) = \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_{lj}\, x_l^i x_j^i \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_j^i + x_0^i = 1, \\ \sum_{j=1}^{m} m_j x_j^i + m_0 x_0^i \geq \overline{m}^i \end{cases} \tag{12}$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x_0^i, x_1^i,\ldots,x_k^i,\lambda,\mu) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} c_{lj} x_j^i x_l^i + \lambda\left(\sum_{j=1}^{k} x_j^i + x_0^i - 1\right) + \tag{13}$$

$$+\mu\left(\overline{m}^i - \left(\sum_{j=1}^{k} m_j x_j^i + m_0 x_0^i\right)\right)$$

Выпишем необходимые условия оптимальности

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{k} x_j^i + x_0^i - 1 = 0, \tag{14}$$

$$\mu\left(\overline{m}^{i}-\sum_{j=1}^{k}m_j x_j^i - m_0 x_0^i\right)=0\,,\ \mu\ge 0\,, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_l^i}=2\sum_{j=1}^{k}c_{lj}x_j^i+\lambda-\mu m_l=0, \quad l=1,\ldots,k \qquad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_0^i}=\lambda-\mu m_0=0 \qquad (17)$$

Из (17) получим:

$$\lambda=\mu m_0 \qquad (18)$$

Из (16) имеем:

$$Cx^i=-\frac{\lambda}{2}e+\frac{\mu}{2}m$$

или

$$\begin{cases}\dfrac{\mu}{2}\left(e'C^{-1}m-m_0e'C^{-1}e\right)=1-x_0^i\\[2mm] \dfrac{\mu}{2}\left(m'C^{-1}m-m_0m'C^{-1}e\right)=\overline{m}^{i}-m_0x_0^i\end{cases}$$

Поделив второе равенство на первое, найдем

$$\frac{\overline{m}^{i}-m_0x_0^i}{1-x_0^i}=\frac{m'C^{-1}m-m_0\left(m'C^{-1}e\right)}{e'C^{-1}m-m_0\left(e'C^{-1}e\right)}$$

откуда

$$x_0^i=\frac{\left[\left(m'C^{-1}m\right)-m_0\left(m'C^{-1}e\right)\right]-\overline{m}^{i}\left[\left(e'C^{-1}m\right)-m_0\left(e'C^{-1}e\right)\right]}{\left[\left(m'C^{-1}m\right)-m_0\left(m'C^{-1}e\right)\right]-m_0\left[\left(e'C^{-1}m\right)-m_0\left(e'C^{-1}e\right)\right]} \qquad (20)$$

Используя найденное значение x_0^i, получаем

$$\frac{\mu}{2}=\frac{\overline{m}^{i}-m_0}{\left(m'C^{-1}m\right)-2m_0\left(m'C^{-1}e\right)+m_0^2\left(e'C^{-1}e\right)}=\frac{\overline{m}^{i}-m_0}{\left(m-m_0e\right)'C^{-1}\left(m-m_0e\right)} \qquad (21)$$

поэтому согласно (18) и (19) найдем

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{m_0\left(\overline{m}^i - m_0\right)}{(m - m_0 e)' C^{-1}(m - m_0 e)}$$

$$x^i = \frac{(\overline{m}_i - m_0) C^{-1}(m - m_0 e)}{(m - m_0 e)' C^{-1}(m - m_0 e)}. \qquad (22)$$

Равенство (22) – формула для вычисления оптимального портфеля с безрисковой ценной бумагой для инвестора *i*.

Библиографический список

Буренин А.Н. Рынок ценных бумаг и производство финансовых инструментов / А. Н. Буренин. - Москва: Научно-техническое общество им. С. И. Вавилова, 2009. - 418 с.

Галанов В.А. Рынок ценных бумаг: Учебник / В.А. Галанов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 378 с.

Едронова В.Н. Рынок ценных бумаг: Учебное пособие / В.Н. Едронова, Т.Н. Новожилова. - Москва: Магистр, 2010. - 684 с.

Жуков Е.Ф. Рынок ценных бумаг: Комплексный учебник. / Е.Ф. Жуков, Н.П. Нишатов, В.С. Торопцов и др. - М.: Вузовский учебник, 2012. - 254 с.

Ковалев В. В. Курс финансового менеджмента : учебник / В. В. Ковалев. – Москва: Проспект, 2011. – 480 с.

Кузнецов, А.В. Высшая математика. Математическое программирование. / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – СПб.: Лань, 2013. – 352 с.

E. A. Nikolaeva, E. N. Gribanov

T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russia

THE MODEL OF THE SECURITIES MARKET WITH THE RISK-FREE PAPER

In this paper, we consider the case when an investor, along with the purchase of risky securities, can make investments that are not associated with risk (acquire risk-free securities). A static mathematical model of the market with a risk-free security was built, the investor's task was described, in the form of an optimization problem, in which conditions related to the limited possibility of acquiring securities were additionally introduced. Using the Lagrange function and the necessary conditions for optimality, we found the optimal investor portfolio. The concepts of demand, investor supply and the concept of equilibrium in a market with risk-free securities are defined. Proved the existence of an equilibrium state in the market with risk-free securities. Proved a necessary condition for the existence of an equilibrium state in the market with a risk-free security.

Key words: securities market, securities, yield, risk, securities portfolio, risk-free securities.