

УДК 624.046:531.01

**БИФУРКАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ КАК КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ
КОНСТРУКЦИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИХ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ****НАЗАРОВ Д.И.**

доцент, канд. техн. наук

Кузбасский государственный технический университет имени
Т.Ф.Горбачева, г.Кемерово

Аннотация: Основным инструментом геомеханического моделирования и задач проектирования горнотехнических зданий и сооружений, за последнее время, стали пакеты специализированного конечно-элементного анализа. Исследование возможностей МКЭ для определения устойчивости и геометрически-нелинейного (деформированного) состояния показывает невозможность корректно определять предельную несущую способность по критерию бифуркации. Бифуркация, как физический процесс приводящего к разрушению конструкций, исследована как аналитически, так и на примере реальных конструкций здания подвергнувшихся разрушению (в форме не учитываемых как МКЭ, так и действующих норм по проектированию), показывает необходимость учета бифуркации как критерия предельной несущей способности.

Ключевые слова: Теория катастроф, бифуркация, несущая способность, разрушение, устойчивость, метод конечных элементов, строительная механика

Abstract: Major designing tool in the last time for geomechanical engineering and for structural analysis mining buildings and structures has become specialized finite-element analysis computer program. Analyzing the skill FEM program for solving buckling and geometry-nonlinear (large deflection) state shows the impossibility of correctly determining the crash criterion excluding using the bifurcation criterion. The bifurcation as a physical process leading to the structures crash, show both in analytical analysis and in the example of real building structures to crash subjected, this criterion (unfortunately don't uses by either FEM or current design standards) shows the need to take it into structural analysis as crash criterion.

Keywords: Catastrophe theory, bifurcation, critical load, crash, buckling, finite element method, structural analysis

За последние десятилетия главным инструментом моделирования задач как геомеханики, так и проектирования горнотехнических зданий и сооружений, включая задачи на подрабатываемых территориях и рекультивируемых выработанных пространствах, стали программы конечно-элементного анализа. Наиболее массово используемые отечественными учеными и конструкторами: для задач геомеханики – Plaxis, Fidesys, Midas, Rocscience, для задач проектирования горнотехнических зданий и сооружений – Lira, SCAD-office,

SAP2000, ETABS, для общих задач – ANSYS, Abaqus, Comsol. Достоверность результатов моделирования не только актуальная научная проблема, но и требование в области проектирования особо опасных, технически сложных и уникальных объектов (см. ст. 16.1. №116-ФЗ «О промышленной безопасности опасных производственных объектов», ст. 16. №384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений»).

Предложенный ранее для анализа тестовые задачи [7, 8], наряду с выполненными исследованиями этих задач [10, 12, 15, 16] анализирующих применяемые МКЭ программы основанные на современных физико-математических моделях, показывают отсутствие учёта бифуркационного поведения конструкций. Моделировании геометрически-нелинейных задач в статической постановке актуального метода конечных элементов не применимо с достаточной достоверностью [15, 16] для практического применения обеспечивающего безопасность, поскольку бифуркация, приводящая к разрушению конструкций, в современной теории, не определяется адекватно физической модели. Невозможность достоверно определять предельную несущую способность в геометрически-нелинейной (деформированной) модели актуальными программами МКЭ ранее показанная примерами и обоснована отсутствием строгого физического определения и соответствующих математических формулировок для таких фундаментальных понятий как: статическая сила, статическое нагружение, устойчивость, несущая способность, указывает на необходимость формулирования физических определений и строго-эквивалентных, этим физическим определениям, математических формулировок, в т.ч. и обратное (формулировка физического явления соответствующего математическому определению бифуркация).

Бифуркационные принципы теории катастроф указывают на игнорируемый, в современной теории МКЭ, фактор бифуркации при геометрически-нелинейном анализе, как при проектировании, так и при экспертизе промышленной безопасности. Теорию катастроф, как раздел современной математики, активно развивали и пропагандировали отечественные ученые, такие как академик Арнольд В.И., Гивенталь А.Б., Закалюкин В.М. (ссылки на источники см. [12, 16]), теорию катастроф (отдельные её прикладные элементы) в механике развивали Алфутов Н.А., Колесников К.С., однако без практической реализации применительно к конкретным техническим задачам, т.е. как форму прикладной математики. Теоретическое развитие и практическую ориентацию математической теории катастроф развивают современные ученые [1-6, 17-22] в основном на основе простейших математических моделях исследуемых физических явлений [5, 6, 17, 18], геомеханики [9, 11, 19], строительной механики и расчета конструкций [1-4, 13, 14], и общественных вопросах [20].

Механическими моделями, используемыми в теории катастроф, являются машина катастроф Зимана и ферма Мизеса. Поведение фермы Мизеса удобнее исследовать (как бифуркационную задачу) не на двух стержнях, а на одном, как для конструкции, изображенной на Рис.1а, состоящей из стержня с продольной жесткостью EA , проекциями x и y , длиной l зависимость вер-

тикальной силы (P_y) от вертикального перемещения (Δy) определяется уравнением:

$$P_y = EA(y - \Delta y) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - \Delta y)^2}} - \frac{1}{l} \right) \quad (1)$$

График уравнения (1) представленный на Рис. 1а изменения энергии внешней силы P_y (см. Рис. 1в) и энергии деформации, показывает, что точка бифуркации и, соответствующий ей прыжок, согласно теории катастроф, соответствуют статической постановке задачи только при абсолютной диссипации «лишней» энергии, однако согласно закону сохранения энергии требуется компенсация, что соответствует положению энергетического равновесия (см. Рис. 1б). Формулировку Ломоносовом Эйлеру об устойчивости кораблей «Тела, плавающего на воде, равновесное положение будет устойчиво, еже ли оно тело, будучи несколько наклонено, опять справится, в противном случае положение будет падкое», применительно к современной механике формулируется: «Состояние статического равновесия – состояние, в котором система, при вариационно-возможном отклонении внешним воздействием, неизменно возвращается в исходное состояние после прекращения воздействия», если система не возвращается, то эта предел несущей способности (даже без учета разрушения, или изменений системы приводящей к невозможности её эксплуатации).

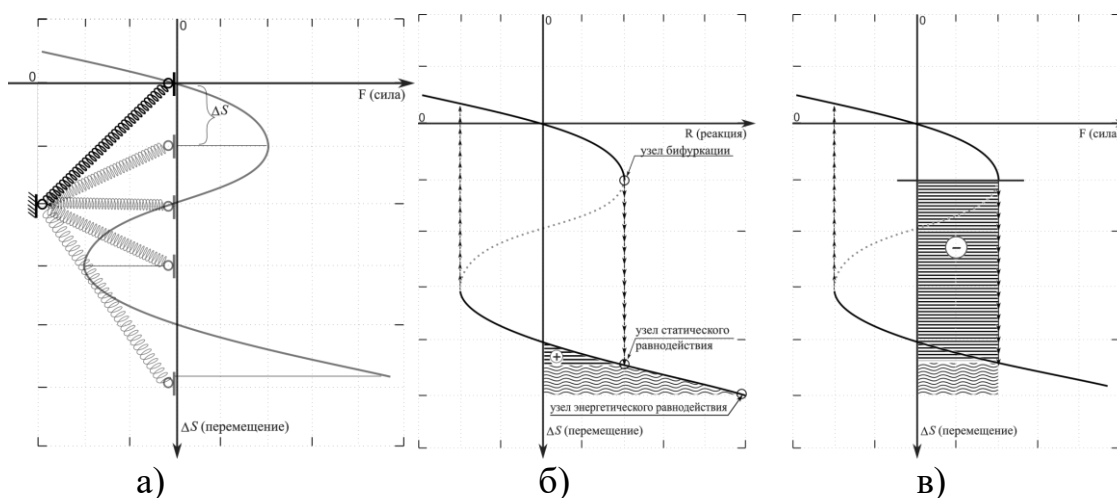


Рисунок 1 - График фермы Мизеса: а) реакции опоры, б) изменения энергии деформации, в) изменения энергии внешней силы

Моделируя бифуркацию с учетом динамических параметров системы, а именно, для спаренного уголка №10 из стали ВСт3кп, длиной 150 см с отклонением 7 см, получаем критическую силу ≈ 500 кгс, перемещение до бифуркации – 3,172 см, перемещение узла после бифуркации соответствующее статической нагрузке ≈ 4500 кгс. При этом энергия удара при бифуркации ≈ 100 Дж/кв.см, что соответствует ударной вязкости стали ≈ 100 Дж/кв.см. Фактически явление бифуркации физически эквивалентно внезапно приложенной нагрузке, только коэффициент динамичности может быть значительно больше двух. Примером реального разрушения конструкций здания от

бифуркации представлено аварией здания в г. Прокопьевск Кемеровской области (автор работы выступал и как эксперт, так и как проектировщик усиления аварийных ферм), представленный в ранее выполненных работах [12, 15, 16].

Исходя из физических свойств геометрически-нелинейного анализа (на примере реакции опоры фермы Мизеса, по Рис. 2а) для равновесных состояний общее количество решений, как решение задачи трёх тел (Эйлера-Лагранжа), составляет для «силовых» решений 2^n , для «кинематических» решений 3^n , где n – количество стержней системы. Однако указывать на верность одного и неверность другого решения – преждевременно, так как математически все решения равноправны в рамках актуальной теории МКЭ.

В отношении анализа устойчивости (buckling analysis) необходимо отметить как неучитываемые бифуркации, так и математический (а не физический) подход к решению, при нелинейном анализе устойчивости не рассматривается реальное физическое явление – прощелкивание, с возможностью разрушения от динамического воздействия. В линейном анализе определяется критическая сила по Эйлеру при которой возникает возможное равновесное криволинейное состояние в добавление к существующему линейному. Леонардо Эйлер определил эту силу в 1743 году, опубликовав (см. Рис. 2) в работе «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive, Solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti». Только проблема даже не в том, что это не критерий «необходимого и достаточного условия», а только «необходимое условие», а проблем в том, что разработанные в тридцатых годах прошлого века методы определения критической силы (см. уравнение 2) для систем стержней математически являются поиском собственных значений матрицы жесткости:

$$[K - \lambda K_N] \Delta s = 0 \quad (2)$$

где : K – матрица жесткости системы, K_N – геометрическая матрица жесткости системы, λ – вариационный параметр, Δs – вектор перемещений узлов системы.

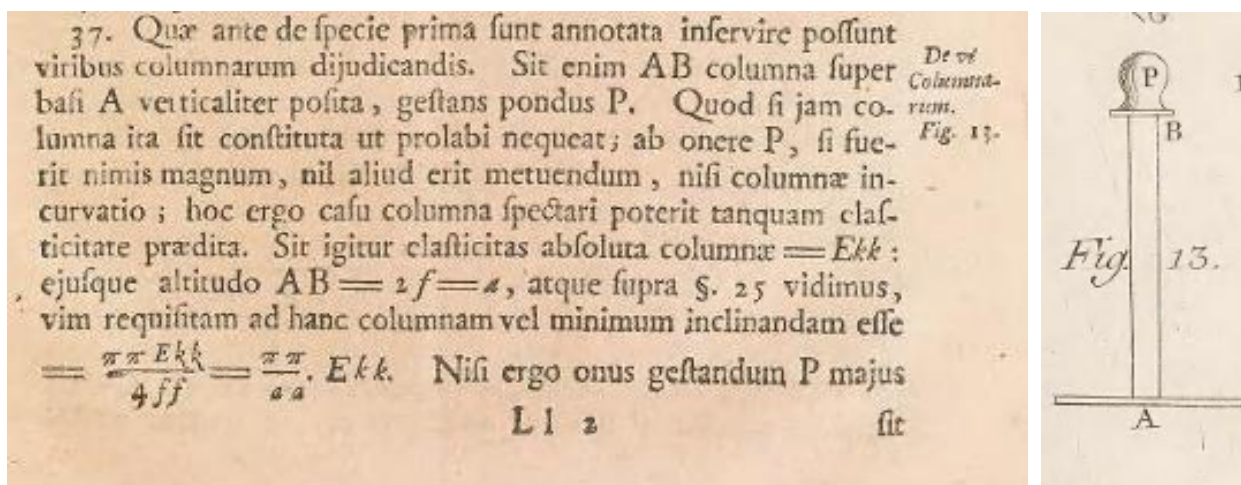


Рисунок 2 - Фрагмент оригинального труда Эйлера определения устойчивости стержней: текст работы и расчетная модель

Критические силы для системы стержней – это точные математические значения для матрицы жесткости, ни каких возможных потерь устойчивости при других значениях быть не может. При этом, если логически обосновано для одного стержня при превышении критической силы заявлять о потере устойчивости, то для системы из нескольких стержней – уже нет. Сама постановка задачи, как поиск собственных значений матрицы жесткости даже с точки комбинаторики является неполноценным, т.к. количество собственных значений определяется рангом матрицы (количеством степеней свободы системы), а физически, количество форм выгнутых элементов при потере устойчивости, зависит от количества элементов и определяется выражением:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3)$$

где: n – количество элементов, k – количество неустойчивых элементов, C_n^k – количество комбинаций системы из n элементов потери устойчивости k элементов, а общее количество всех комбинаций потерь устойчивости $\sum C_n^k$ для $k \in [1, n]$, т.е. сочетание без повторений, например система из четырех элементов с одним общим узлом, в плоской постановке задачи, согласно современной теории имеет максимум две схемы нагружения при потере устойчивости, а согласно комбинаторики (см. Рис. 3) надо рассматривать: четыре варианта потери устойчивости каждого отдельного элемента, шесть вариантов потери устойчивости совместно двух элементов, четыре – для трёх, один – для всех, т.е. необходимо рассмотреть 15 схем нагружения.

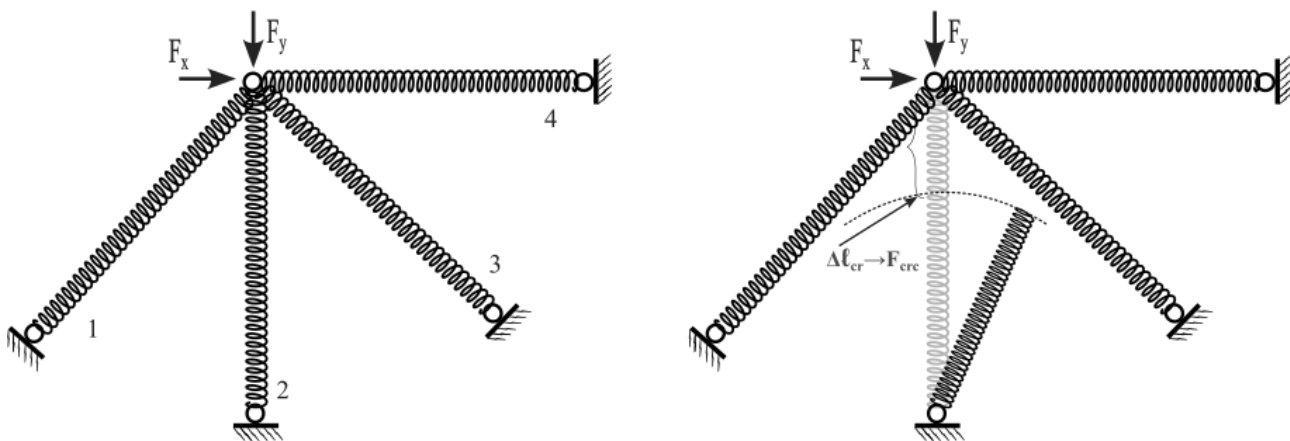


Рисунок 3 - Схема к определению возможных количеств потерь устойчивости

Таким образом, если нелинейный анализ устойчивости не соответствует физической модели бифуркации (прощёлкивания) и в исходных данных требует или предварительного линейного расчета на устойчивость, или внесения дефектов, то линейный анализ устойчивости актуального МКЭ неполноценен, поскольку: формулирует необходимое (одно из...), а не достаточное условие существования смежных форм равновесия; не формулирует критерия опасности смежных форм равновесия (при наличии как нормативной, так и практической базы, например, по балкам с гибкой стенкой, или гибким свя-

зиям, не указывает на опасность/безопасность данной формы); реализация через усилия, а не через полное напряженно-деформированное состояние, формирует ложные формы потери устойчивости; реализация через собственные значения матрицы (размерности степеней свобод узлов), а не через комбинацию возможных изгибов элементов, многократно занижает количество возможных форм.

Разработка физической модели и математической реализации достоверного конечно-элементного метода реализующего геометрически-нелинейную схему деформирования с использованием бифуркационного критерия – актуальная и важная научная задача, особенно с учетом практической значимости, обеспечивающей достоверность в вопросах проектирования горнотехнических зданий и сооружений и задачах геомеханики.

Список литературы:

1. Серазутдинов, М. Н. Метод расчета монтажных напряжений в стержневых конструкциях, усиливаемых в деформированном состоянии / М. Н. Серазутдинов, М. Н. Убайдуллоев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2024. – Т. 20, № 3. – С. 197-210. – DOI 10.22363/1815-5235-2024-20-3-197-210. – EDN KSBHBB.
2. Manuylov, G. A. On Errors When Replacing Non-Bifurcational Stability Problems for Elastic Frames with Bifurcational Ones / G. A. Manuylov, S. B. Kosytsyn, M. M. Begichev // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2024. – Vol. 20, No. 1. – P. 116-123. – DOI 10.22337/2587-9618-2024-20-1-116-123. – EDN KCJPDR.
3. Муртазалиев, Г. М. Моделирование процесса нелинейного деформирования гибких оболочек / Г. М. Муртазалиев, М. М. Пайзулаев // Актуал. пробл. механики и строительства в современных условиях : сб. науч. тр. – Махачкала, 2025. – С. 262-270. – EDN JKXYRN.
4. On Energy Method for Solving the Problem of Stability and Postbuckling Bending of Beams Taking Into Account a Shear and Nonlinearly Elastic Supports / R. A. Kayumov, F. R. Shakirzyanov, A. G. Tamrazyan, A. V. Alexeitsev // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, No. 10. – P. 5055-5068. – DOI 10.1134/S1995080224606003. – EDN RYNUVS.
5. Харланов, В. Л. Инкрементальные методы решения геометрически нелинейных задач / В. Л. Харланов, С. В. Харланова // Строительная механика и расчет сооружений. – 2023. – № 5(310). – С. 64-69. – DOI 10.37538/0039-2383.2023.5.64.69. – EDN EAMHYU.
6. A new method of failure analysis / S. Alexandrov, M. Rynkovskaya, I. Bajmuratov [et al.] // Vietnam Journal of Science and Technology. – 2024. – Vol. 62, No. 1. – P. 170-183. – DOI 10.15625/2525-2518/18622. – EDN KIYJQJ.
7. Назаров Д.И. Современное состояние геометрически нелинейного конечно-элементного анализа конструкций // Информационные и социально-экономические аспекты создания современных технологий. -1999. № 3.

8. Назаров Д.И. Геометрически нелинейный анализ в метод конечных элементов, реальности и мифы // Проблемы динамики, прочности и износостойкости машин. 2000. № 6.
9. Dorofeev, N. V. The algorithm for complex processing of heterogeneous data at the local level in an automated geotechnical monitoring system / N. V. Dorofeev, A. V. Grecheneva, E. S. Pankina // CEUR Workshop Proceedings, Barnaul, 21 октября 2021 года. – Barnaul, 2021. – P. 34-45. – EDN ZSHQV.
10. Pershin, V. V. Safety of mining engineering buildings and facilities under fern analysis and catastrophe theory // Chinese Coal in the XXI Century: Mining, Green and Safety : Taishan Academic Forum - Project on Mine Disaster Prevention and Control, Qingdao, 17–20 октября 2014 года. Vol. 4. – Qingdao: Atlantis Press, 2014. – P. 428-432. – EDN UGJQYJ.
11. Панькина, Е. С. Контроль образования деструктивных процессов в системе геотехнического мониторинга / Е. С. Панькина, Н. В. Дорофеев, А. В. Греченева // Южно-Сибирский научный вестник. – 2021. – № 5(39). – С. 43-50. – DOI 10.25699/SSSB.2021.39.5.001. – EDN LLSMSJ.
12. Першин, В. В. Бифуркационный анализ разрушения конструкций горнотехнического здания // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. – 2015. – № 4. – С. 124-129. – EDN TUXPTN.
13. Абдуллах, Х. Прогрессирующее обрушение: факты, возможные причины, оценка методов анализа по расходу материалов / Х. Абдуллах, В. Н. Алехин, М. В. Плетнев // Academia. Архитектура и строительство. – 2023. – № 4. – С. 153-158. – DOI 10.22337/2077-9038-2023-4-153-158. – EDN NVCBWH.
14. Надежность пространственных стержневых металлических конструкций высокого уровня ответственности / В. Ф. Мушанов, А. Н. Оржеховский, А. В. Мушанов, М. Н. Цепляев // Вестник МГСУ. – 2024. – Т. 19, № 5. – С. 763-777. – DOI 10.22227/1997-0935.2024.5.763-777. – EDN GEAKOH.
15. Nazarov, D. I. Design and expertising industrial safety mining buildings and structures with the catastrophe theory // Miner's week - 2015 : Reports of the XXIII international scientific symposium. – Москва: НИТУ МИСиС, 2015. – P. 363-369. – EDN TSDMVV.
16. Назаров, Д. И. Разрушение конструкций горнотехнического здания, энергетический и бифуркационный анализ // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2015. – № 7. – С. 95-100. – EDN UGCBKP.
17. Мустафина, И. Ж. О безопасных и опасных точках бифуркации в периодических динамических системах // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2024. – № 3(66). – С. 47-54. – DOI 10.17072/1993-0550-2024-3-47-54.
18. Морозов, Н. Ф. Ветвление форм равновесия кольцевой микропластинки в электростатическом поле двух электродов / Н. Ф. Морозов, А. В. Лукин, И. А. Попов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 1. – С. 110-132. – DOI 10.31857/S1026351924010063. – EDN WALEPV.

-
19. Лопатин, С. Н. Комплексная оценка устойчивости подземных горных выработок при различных горнотехнических условиях / С. Н. Лопатин, М. А. Журавков, П. С. Передрий // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук. – 2024. – Т. 69, № 4. – С. 340-352. – DOI 10.29235/1561-8358-2024-69-4-340-352. – EDN EOBQMR.
 20. Котенко, И. В. Методы теории катастроф для оценки и прогнозирования уровня защищенности объектов, использующих технологию Интернета вещей / И. В. Котенко, Д. С. Левшун, И. Б. Паращук // Математические методы в технологиях и технике. – 2025. – № 1. – С. 46-49. – EDN CVAKLN.
 21. Мошинский, А. И. Механическая система, демонстрирующая “катастрофическое поведение” // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 2023. – № 4. – С. 83-96. – DOI 10.31857/S0572329923700034.
 22. Tsypkin, G. G. Bifurcations and Stability of Phase Transition Fronts in Geothermal Reservoirs // Fluid Dynamics. – 2024. – Vol. 59, No. 4. – P. 732-740. – DOI 10.1134/S0015462824603231. – EDN NODLAG.