

УДК 621.3.014.12

В.А. ЗАХАРОВ, студент гр. ЭТ-21-22 (ЧувГУ)
Научный руководитель Н.В. РУССОВА, к.т.н., доцент (ЧувГУ)
г. Чебоксары

РАСЧЕТ КОМПЛЕКСНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОВОДНИКОВ С УЧЕТОМ СКИН-ЭФФЕКТА И ЭФФЕКТА БЛИЗОСТИ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ УМОВА-ПОЙНТИНГА

В инженерных расчетах электрических машин переменного тока важное место имеет определение комплексного сопротивления проводников, расположенных в пазах статора. На сопротивление проводников при синусоидально изменяющемся токе оказывают наиболее критичное воздействие скин-эффект и эффект близости. Учет влияния этих факторов имеет большое значение при проектировании электрических машин, так как вышеупомянутые эффекты снижают КПД машины, что в условиях реального проектирования приведет к затягиванию процесса и увеличению стоимости изделия. В этих условиях получение четкой физико-математической картины влияния скин-эффекта и эффекта близости на комплексное сопротивление проводников является актуальной задачей.

В работе будем рассматривать проводники прямоугольного сечения. На основе законов и соотношений теории электромагнитного поля и технической электродинамики получим математическую картину воздействия поверхностного эффекта и эффекта близости на комплексное сопротивление проводника, а также проведем его расчет в программном комплексе ELCUT, который моделирует электромагнитное поле на основе метода конечных элементов (МКЭ).

Для начала расчета комплексного сопротивления проводника воспользуемся теоремой Умова-Пойнтинга в комплексной форме записи [1].

В ходе диагностики контролируются (рис. 1): падения напряжения на тиристоре (1) и на управляющем электроде (2); токи через тиристор (3) и в цепи управления (4); температуры корпуса (5); радиатора (6); окружающей среды (7). Таким образом, в состав системы сбора и обработки данных входят датчики напряжения (1, 2), тока (3, 4) и температур корпуса, радиатора и окружающей среды (5-7).

$$-\oint \tilde{\vec{H}} d\vec{S} = \int_V \sigma E^2 dV + 2j\omega \int_V \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right) dV, \quad (1)$$

где $\vec{\Pi}$ – комплексный вектор Пойнтинга.

Перепишем формулу (1) в более удобной форме:

$$-\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = P + jQ = I^2 R + jI^2 X = I^2 \underline{Z}, \quad (2)$$

где \underline{Z} – комплексное сопротивление проводника, R – активное сопротивление, X – внутреннее индуктивное сопротивление.

Выразим из соотношения (2) комплексное сопротивление:

$$\underline{Z} = \frac{-\oint \vec{\Pi} d\vec{S}}{I^2} \quad (3)$$

Чтобы верно определить выражение для \underline{Z} , изобразим векторы $\vec{\Pi}$, $d\vec{S}$ на каждой из поверхностей поперечного сечения проводника (рис. 1).

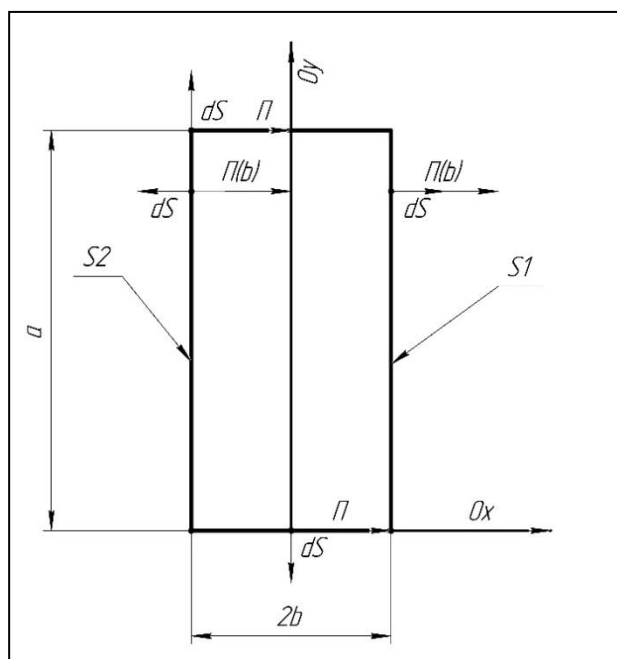


Рис. 1. Поперечное сечение проводника с указанием направления векторов $\vec{\Pi}$ и $d\vec{S}$

Анализируя вышеприведенный рисунок, приходим к выводу, что потоки электромагнитной энергии будут отличны от нуля только на плоскостях S_1, S_2 , так как на остальных плоскостях векторы взаимно перпендику-

лярны. Кроме того, из рисунка видно, что проводник симметричен относительно оси Оу, следовательно имеет место следующее равенство:

$$-\oint \tilde{\Pi} d\vec{S} = -2 \oint \tilde{\Pi}(b) d\vec{S} \quad (4)$$

Для нашего проводника $\tilde{\Pi}$ постоянен, а значит, интеграл по замкнутому контуру можно представить как произведение модуля вектора Пойнтинга на площадь боковой поверхности, тогда формула (4) примет вид:

$$-\oint \tilde{\Pi} d\vec{S} = -2\tilde{\Pi}(b)a\ell, \quad (5)$$

где ℓ – длина проводника, a – высота проводника (в условиях нашей задачи).

В теории электромагнитного поля получены формулы для \dot{E} и \dot{H} , которые приводятся ниже [1]:

$$\dot{E} = \frac{\dot{I}k}{2a\sigma\text{sh}(kb)} \text{ch}(kx), \quad (6)$$

$$\dot{H} = -\frac{\dot{I}\text{sh}(kx)}{2a\text{sh}(kb)} \quad (7)$$

где k – коэффициент затухания электромагнитной волны, a и b геометрические размеры проводника.

Подставим (6) и (7) в формулу (5) и учтем, что $\tilde{\Pi}(b) = \dot{E}(b) \cdot \dot{H}(b)$:

$$-\oint \tilde{\Pi} d\vec{S} = 2 \frac{I^2 k \text{cth}(kb)}{4\sigma a} \ell \quad (8)$$

Чтобы получить окончательный результат, подставим соотношение (8) в (3):

$$\underline{Z} = \frac{\ell k \text{cth}(kb)}{2\gamma a} \quad (9)$$

При условии, что скин-эффект резко выражен, можно считать $\text{cth}(kb) \approx 1$, тогда имеет место следующая формула:

$$\underline{Z} = \frac{k\ell}{2\gamma a} = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} \frac{\ell}{2\sigma a} (1 + j) \quad (10)$$

Введем понятие глубины проникновения электромагнитной волны в проводник [2]:

$$\frac{1}{\Delta} = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} \quad (11)$$

где Δ - глубина проникновения волны.

С учетом (11) формулу (10) можно представить в виде:

$$\underline{Z} = \frac{(1 + j)\ell}{2\Delta\sigma a} \quad (12)$$

Проведем аналогичный расчет для комплексного сопротивления проводника при наличии эффекта близости. Снова приведем известные из литературы [1] формулы для \dot{E} и \dot{H} :

$$\dot{E} = \frac{j\mu\omega\dot{I}}{k\operatorname{sh}(kb)} \operatorname{ch}(kx) \quad (11)$$

$$\dot{H} = -\frac{\dot{I}\operatorname{sh}(kx)}{a\operatorname{sh}(kb)} \quad (12)$$

Если проанализировать формулу (12), то в точке начала координат $\dot{H} = 0$, следовательно, поток вектора Пойнтинга через поверхность S_2 (рис. 1) будет нулевым. Соотношение (5) можно переписать в виде:

$$-\oint \tilde{\vec{H}} d\vec{S} = -\tilde{H}(b)a\ell \quad (13)$$

Окончательно на основе соотношений (11), (12) и (13) получим выражение для комплексного сопротивления:

$$\underline{Z} = \frac{j\omega\mu\ell}{ka} \operatorname{cth}(kb) \quad (14)$$

В случае интенсивного проявления эффекта $\text{sth}(kb) \approx 1$ и следовательно:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\sigma a} k = (1 + j) \frac{1}{\sigma a} \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \frac{(1 + j) \ell}{\Delta \sigma a} \quad (15)$$

Из произведенных расчетов можно сделать вывод, что эффективное сечение проводника в случае скин-эффекта обратно пропорционально удвоенной глубине проникновения электромагнитной волны, а в случае эффекта близости обратно пропорционально глубине проникновения.

Перейдем к моделированию нашей задачи в среде ELCUT [3]. Примем размеры прямоугольного паза статора электрической машины 6×4 мм, высота проводника 2 мм, частота переменного тока 400 Гц, материал проводников медь, $\sigma = 58 \cdot 10^6$ См/м, магнитная проницаемость $\mu \approx 1$. В условиях нашей задачи влиянием потерь в стали пренебрегаем. По окончании моделирования, получаем следующую картину распределения плотности тока в сечении паза (рис. 2):

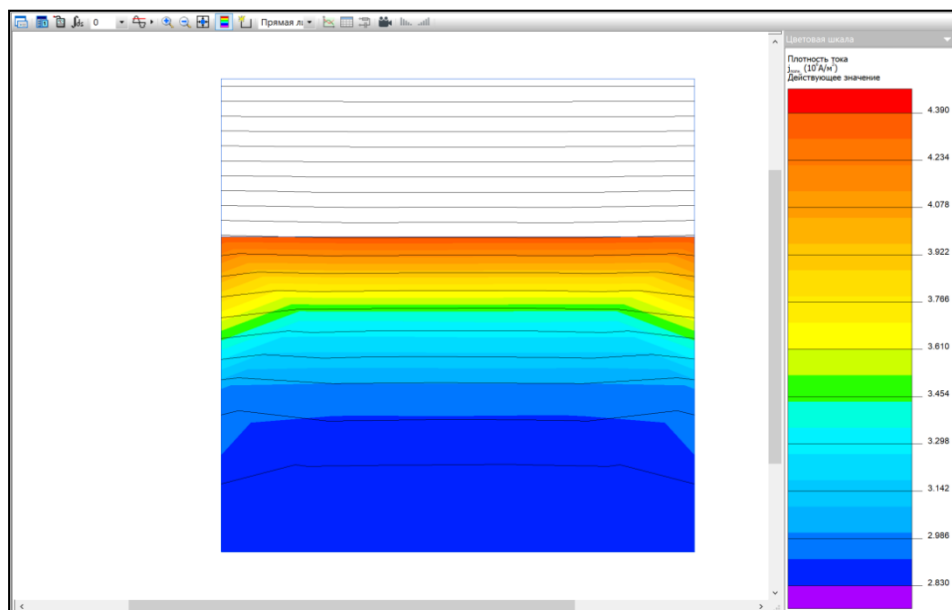


Рис. 2. Распределение плотности тока в поперечном сечении паза

ELCUT позволяет вычислить комплексное сопротивление автоматически, для этого используют опцию «Мастер импеданса». Результат расчета представлен ниже (рис. 3):

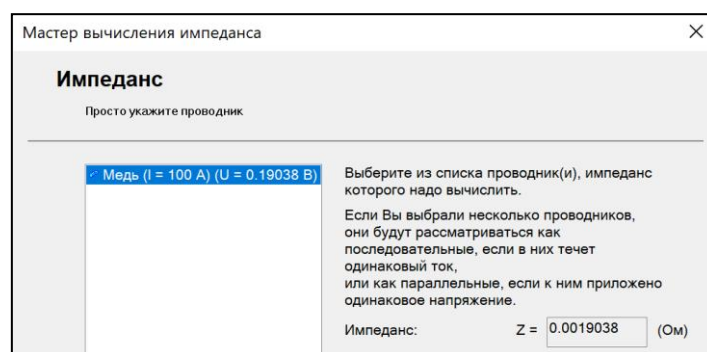


Рис. 3. Комплексное сопротивление, вычисленное в ELCUT

При прямой подстановке параметров в формулу (12) получим:

$$\underline{Z} = \frac{(1 + j)\ell}{2\Delta\sigma a} = \frac{(1 + j)}{2 \cdot 3,3 \cdot 10^{-3} \cdot 58 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \approx 1,3 \cdot 10^{-3} + j1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}$$

Найдем модуль комплексного сопротивления, чтобы провести корректное сравнение с машинным результатом:

$$Z \approx 1,84 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}$$

Сравнивая полученные результаты, можно сделать вывод, что результаты полученный в результате аналитического решения и с использования программного комплекса ELCUT практически совпадают.

Список литературы:

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник. – 10-е изд., стереотипное. – М.: Гардарики, 2003. – 317 с.: ил. ISBN 5-8297-0158-8.
2. Никольский В. В. Теория электромагнитного поля: учебное пособие для радиотехнических специальностей втузов. – Москва: Высшая школа, 1961. – 370 с.: ил. – ISBN 978-5-4475-1986-5.
3. Романова Е.Б., Евстропьев С.К., Кузнецов А.Ю. Практические задания в системе ELCUT. – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 47 с.

Информация об авторах:

Захаров Валерий Александрович, студент гр. ЭТ-21-22 факультета энергетики и электротехники, ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И.Н. Ульянова», 428015, Чувашская Республика, г. Чебоксары, Московский пр-т, д. 15, val_zaxarov@mail.ru

Руссова Наталия Валерьевна, к.т.н., доцент, декан факультета энергетики и электротехники, ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И.Н. Ульянова», 428015, Чувашская Республика, г. Чебоксары, Московский пр-т, д. 15, russova@mail.ru