УДК 519.254

Е.С.ВАСИЛЬЕВА младший научный сотрудник НИЛ (РЭВ и ВТ)
(ВУНЦ ВМФ «ВМА»)
г. Санкт-Петербург

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КУСОЧНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Математическое моделирование динамических процессов, возникающих на практике, является в настоящее время основным инструментом получения знаний об их поведении при различных способах воздействия. Одной из основных задач является оценка состояния изучаемого объекта (процесса). В случае линейных объектов эта задача решается путем применения процедуры Калмана-Бьюси. Как правило, реальные динамические системы носят нелинейный характер, а линейные модели возникают, когда мы, исходя из некоторой совокупности априорных знаний, можем позволить себе ограничиться линейной структурой и нормальными законами распределений воздействий.

Одним из актуальных направлений является применение методов различных кусочных функций при обнаружении и фильтрации случайных процессов.

Рассмотрим суть предлагаемого способа. Предположим, что задана стохастическая динамическая система (ДС) уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) + n_1(t), \\ z = x + n_0(t). \end{cases}, \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Аппроксимируем функцию $f(.)$, входящую в уравнение состояния, на интервалах $[x_i, x_{i+1}]$ кусочно-линейной функцией, определяющей сплайн первой степени S_1 класса C [1] [2]:

$$S_i = \left\{ a_i (x - x_i) + b_i \right\} \Big|_{i=\overline{1N}}. \tag{2}$$

Введём функции прямоугольного окна $h(.)$:

$$h\left(x_i, x_{i+1}\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \left[x_i, x_{i+1}\right); \\ 0, \text{ если } x \notin \left[x_i, x_{i+1}\right). \end{cases} \quad \Rightarrow S_1 = \sum_{i=1}^{n} h\left(x_i, x_{i+1}\right)\left(a_i x + b_i\right),$$

С учётом последнего, стохастическая ДС (1), у которой коэффициент сноса $f\left(x\right)$ аппроксимирован кусочно-линейными функциями, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n} h\left(x_i, x_{i+1}\right)\left(a_i x + b_i\right) + n_1\left(t\right). \tag{3}$$

Для решения задачи линейной фильтрации принимаемой композиции сигнала и помехи в предлагаемом способе нет необходимости рассчитывать значения параметра a_i, так как выражение (3) позволяет на интервалах $\left[x_i, x_{i+1}\right)$ рассматривать (1) как линейное стохастическое уравнение, вследствие чего алгоритм фильтрации для этого интервала представим как фильтр Калмана с параметрами, меняющимися в зависимости от номера интервала Δ_i, к которому принадлежит текущая оценка процесса $x\left(t\right)$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение 1-го порядка вида:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right) + n_1\left(t\right), \; x_0 = 0, m_x\left(0\right) = 0. \tag{4}$$

где $f\left(x\right),$ – детерминированные дифференцируемые функции.

Если проинтегрировать обе части (1), то получим, после операции осреднения что коэффициент сноса будет равен [1]:

$$K_1\left(x\right) = f\left(x\right) + \frac{N_1}{2}. \tag{5}$$

Соответственно коэффициент диффузии имеет вид:

$$K_2\left(x\right) = \frac{N_1}{2}. \tag{6}$$

Значение коэффициента b_i будет определяться с учётом критерия:

$$e_{x_i} = \sum_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x) - b_i \right]^2 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x) - b_i \right) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} b_i$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} b_i dx = 0, b_i = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx} = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx}{\Delta x_i}, \sum e_i < \sum e_i^{(k)}$$

В случае, когда $f(x)$, аппроксимируются, кусочно-постоянной функцией коэффициенты сноса и диффузии для *i*-ой секции будут определяться выражением:

$$K_{1,i}(x) = b_i ; K_{2,i}(x) = \frac{N_1}{2} c_i^2 . \tag{7}$$

Соответствующее уравнение ФПК будет иметь вид:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -b_i \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{N_1}{4} c_i^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{8}$$

Решение уравнения (1) при сформулированных выше условиях записывается в виде [1]:

$$p_i(x,t) = \mathrm{N}\left(b_i t, \quad 2\left(\frac{N_1}{2}\right) c_i^2 t \right) \tag{9}$$

Как видно, плотность вероятности перехода имеет вид нормального распределения с математическим ожиданием $b_i t$ и дисперсией $(N_1 / 2) c_i^2 t$. С течением времени дисперсия увеличивается, причем математическое ожидание с ростом времени равномерно смещается в ту или иную секцию в зависимости от знака коэффициента $K_{1,i}(x) = b_i$.

$$p_i(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left(\frac{N_1}{2}\right) t \sum_i^N h(x_i, x_{i+1}) c_i}} \exp\left[-\frac{\left(x - t \sum_i^N h(x_i, x_{i+1}) b_i \right)^2}{2\left(\frac{N_1}{2}\right) t \sum h(x_i, x_{i+1}) c_i^2} \right]. \tag{10}$$

Таким образом, плотность вероятности случайного процесса, у которого $f(x)$ аппроксимированы кусочно-постоянными функциями, как и в случае аппроксимации кусочно-линейными функциями, представляет собой сочленение частей нормальных плотностей вероятности, определяемых значениями $(b_i, c_i)_{im\overline{0\ N}}$

Так как в задачах линейной фильтрации не требуется вычислять плотность вероятности, а достаточно найти оценку математического ожидания процесса в каждой точке и дисперсию этой оценки, то можно после стандартной процедуры осреднения [1] [3] [4] [5] [6] записать уравнение оценки случайного процесса $x(t) \in \Delta_i$, задаваемого системой (1) в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1}) b_i + \dfrac{R}{N_0}(z - \hat{x}), \\ \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{N_1}{2} - \dfrac{R^2}{N_0} \end{cases} \tag{11}$$

Если рассматривать весь интервал изменения $x \in X$, то дисперсия фильтрации случайного процесса $x(t)$ будет представляться вектором $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n)$. Таким образом, имеет место соответствие: $\{\Delta_i\} \to \{\hat{\sigma}_i^2\}$ и система уравнений (12) представляется уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} h(x_i, x_{i+1}) b_i + \dfrac{2\hat{\sigma}_x^2}{N_0}(u - \hat{x}), \\ \hat{\sigma}_x^2 = 0{,}5\sqrt{N_0 N_1} \end{cases} \tag{12}$$

Из выражения (12) следует, что в стационарном режиме дисперсия фильтрации постоянна на интервалах Δ_i и меняется при переходе к другому интервалу ступенчатым образом. При этом необходимо отметить, что на каждом интервале реализуется линейный фильтр Калмана-Бьюси. При этом дисперсия фильтрации является функцией только оценки $\hat{\sigma}_x^2(\hat{x})$ Важным фактором с вычислительной точки зрения, является то, что стационарные коэффициенты усиления $[N_0 / 2]\sigma_t^2$ могут быть рассчитаны априори и представляться в виде вектора чисел. Поэтому реализация метода фильтрации со стационарными коэффициентами требует значительно меньших объемов памяти и вычислительных затрат. В настоящем методе предлагается, как было показано выше, использовать вместо сплайнов 1-го порядка сплайны 0-го порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t) + n_1(t) \\ z = qs(t) + x(t) + n_0(t) \end{cases} \quad \text{аппроксимация} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = B + n_1 \\ z = \theta s(t) + x(t) + n_0(t) \end{cases}$$

Так как линейная СДУ определяет гауссовскую плотность вероятности, то аппроксимация нелинейной СДУ линейным сплайном приводит к тому, что апостериорная плотность вероятности представляется в виде сплайна, ≪склеенного≫ из кусков нормальных плотностей вероятности при различных математических ожиданиях и дисперсиях (определяемых коэффициентами b_i).

Коэффициенты b_i в общем случае могут быть как положительными, так и отрицательными. Для каждого отдельного интервала Δ_{x_i}, т.е. локально, плотности вероятности будут гауссовскими, но в глобальном смысле во всей области изменения x она будет негауссовской.

Уравнение оценивания состояния ДС можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}_1}{dt} = \mathbf{2B} + \mathbf{K}\left(2\mathrm{z} - \mathrm{s} - \hat{\mathrm{x}}_1\right) \\ \dfrac{d\hat{x}_0}{dt} = \mathbf{K}\left(\mathrm{z} - \hat{\mathrm{x}}_0\right),\ \mathbf{K} = \mathbf{RN}_0^{-1} \\ \dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{N_1} \ \mathbf{-}\ \mathbf{RN_0^{-1}R}^{\mathrm{T}} \\ \dfrac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}_0^{-1}\left(\mathrm{s} + \hat{\mathrm{x}}_0\right)\left(2\mathrm{z} - \mathrm{s} - \hat{\mathrm{x}}_1\right) + \mathrm{s}\mathbf{N}_0^{-1}\mathrm{s}^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

Список литературы:

1. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. Москва: Советское радио, 1973. 232 с.

2. Бурова И.Г., Демьянович Ю.К. Теория минимальных сплайнов. Санкт-Петербург: СПбГУ, 2001. 315 с.

3. Тихонов В.И., Харрисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. Москва: Радио и связь, 1991. 608 с.

4. Бутырский Е.Ю. Алгоритмы оценивания в динамических системах с отказами // Труды учебных заведений связи. 2006. № 174. С. 13-26.
5. Бутырский Е.Ю. Основы теории сплайн-фильтрпции сигналов // Информатика и космос, № 1, 2010. С. 352-264.
6. Бутырский Е.Ю. Теоретические основы моделирования. Саабрюкен: Palmarium, 2012. 613 с.

Информация об авторах:
Васильева Екатерина Сергеевна, младший научный сотрудник НИЛ РЭВ и ВТ ВУНЦ ВМФ «ВМА» 198516, г. Петергоф ул. Разводная д.15,