

УДК 622.822.2: 622.271: 519.6

Сирота Дмитрий Юрьевич, доцент, к.т.н.
(КузГТУ, г. Кемерово)

Sirota Dmitriy, associate professor, candidate of engineering sciences
(KuzSTU, Kemerovo)

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФОРМЫ ИСТОЧНИКА ЕСТЕСТВЕННОГО СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ

THE PROBLEM RECOVERY OF SOURCE NATURAL STATIONARY FIELD

Аннотация

Восстановление формы источника стационарного поля ньютоновского типа является задачей обратной и некорректной по Адамару. Основным методом её решения заключается в переходе к задаче в терминах математического программирования в модификации А.Н. Тихонова. Рассматриваются две основные проблемы, которые появляются после такого перехода.

Abstract

The recovery of the source stationary field of the Newtonian type is the task of inverse and ill-posed by Hadamard. The main method of its solution is to go to task in terms of mathematical programming in the modification of A. N. Tikhonov. We consider two main problems, which appear after such a transition.

Одной из многочисленных задач геофизики (электро-, магнито-, гравиразведки) является задача определения размеров и глубины расположения источника естественного стационарного поля соответствующей природы. Указанная задача является частным случаем большого класса задач интерпретации измеренных данных.

С точки зрения прикладной математики все задачи интерпретации измеренных данных являются обратными и некорректными [1 – 4]. В настоящее время основным методом решения таких задач является использование регуляризирующего функционала А. Н. Тихонова [1], минимум которого соответствует решению исходной обратной задачи.

Предположим, что поле порождается источником произвольной трёхмерной формы, расположенном в двухслойной однородной среде с плоскопараллельными границами.

В этом случае потенциал точечного источника будет определяться известной формулой [5]

$$u_M = \frac{C}{[x_M^2 + y_M^2 + z_M^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (1)$$

где C – коэффициент, характеризующий силу электрического тока источника; M – точка измерения потенциала поля на земной поверхности.

Для получения расчётной формулы величины потенциала цилиндра проинтегрируем выражение (1) по объёму тела V_P :

$$U_M = C \int_{V_P} \frac{dV_P}{\left[(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2 \right]^{3/2}}, \quad (2)$$

где P – точка, расположенная в объёме тела.

Перейдём в интеграле (2) к безразмерным переменным по общей формуле $w \cdot z_M^{-1} = \bar{w}$, где под w подразумеваются координаты точки измерения поля M и переменные интегрирования тела P . Тогда (2) примет вид

$$U_M = C \cdot z_M^2 \int_{\bar{V}_P} \frac{d\bar{V}_P}{\left[(\bar{x}_P - \bar{x}_M)^2 + (\bar{y}_P - \bar{y}_M)^2 + (\bar{z}_P - 1)^2 \right]^{3/2}} = C \cdot z_M^2 \cdot \bar{U}_M \quad (3)$$

Далее для упрощения вида формул горизонтальную черту у безразмерных величин писать не будем.

Если в формуле (3) известна форма тела (его уравнение) и требуется определить объёмный потенциал, то получаем прямую задачу геофизики; если же известно распределение потенциала и требуется определить форму тела, то получаем обратную задачу.

Рассмотрим два разобранных автором в [6] случая: плоского (рисунок 1.а.) и цилиндрического (рисунок 1.б.) источников.

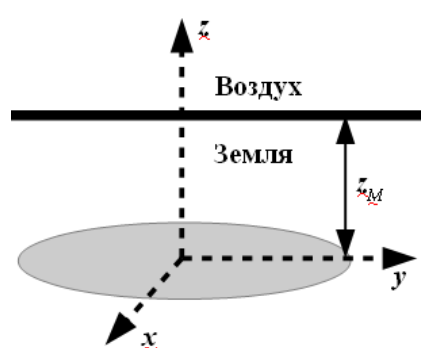


Рисунок 1.а

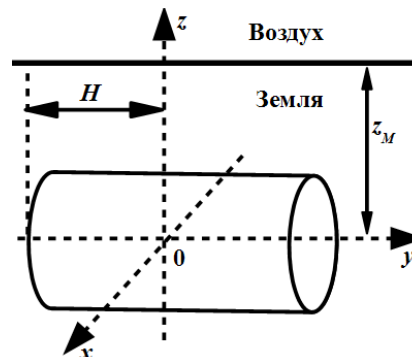


Рисунок 1.б

Для интегрирования по произвольной плоской горизонтальной области с замкнутой границей перейдём от декартовой системы координат к полярной по следующим стандартным формулам: $x_p = r \cos \varphi$, $y_p = r \sin \varphi$, где $\varphi \in [0; 2\pi]$ и $r \in [0; \rho(\varphi)]$, при этом функция $\rho(\varphi)$ определяет контур плоского источника тока.

Тогда интеграл (3) примет вид

$$\bar{U}_M = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\rho(\varphi)} \frac{r dr}{\sqrt{R}} \right] d\varphi, \quad (4)$$

где $R = r^2 + B \cdot r + A$, $A = x_M^2 + z_M^2$, $B = -2x_M \cos \varphi$, а внутренний интеграл в

$$(4) \text{ равен } \int_0^{\rho(\varphi)} \frac{rdr}{\sqrt{R}} = \left(\sqrt{R} - \frac{B}{2} \ln \left| r + \frac{B}{2} + \sqrt{R} \right| \right) \Big|_0^{\rho(\varphi)} = F(x_M, \rho(\varphi)).$$

Для интегрирования по цилиндру произведём вначале интегрирование в (3) по интервалу $y_P \in [-H; H]$:

$$\bar{U}_M = \iint_{S_P} \left[\int_{-H}^H \frac{dy_P}{[(y_P - y_M)^2 + D^2]^{1/2}} \right] dS_P = \iint_{S_P} F(M, P) dS_P, \quad (5)$$

где $F(M, P) = \ln(Q_1) - \ln(Q_2)$, $Q_1 = H - y_M + \sqrt{(H - y_M)^2 + R^2}$,
 $Q_2 = -H - y_M + \sqrt{(H + y_M)^2 + R^2}$, $R = (x_P - x_M)^2 + (z_P - 1)^2$.

Для вычисления двойного интеграла воспользуемся методом интегрирования по плоской области с переходом, как и выше, к полярной системе координат. Тогда (5) примет вид

$$\bar{U}_M = \iint_{S_P} F(M, P) dS_P = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\rho(\varphi)} F(M, \varphi, r) dr \right] d\varphi.$$

Таким образом, задача определения формы источника поля по измерениям потенциала на дневной поверхности свелась к интегральному уравнению Фредгольма – Урысона 1-го рода относительно неизвестной функции $\rho(\varphi)$:

$$\int_0^{2\pi} R(M, \rho(\varphi)) d\varphi = U^*, \quad (6)$$

где $R(M, \rho(\varphi))$ – ядро нелинейного вида, которое определяется параметрами вмещающего пространства; U^* – измеренные на дневной поверхности значения потенциала ЕЭП.

Формула (6) позволяет вычислить величину потенциала ЕЭП цилиндра в любой точке на поверхности земли. Далее для решения обратной задачи восстановления формы сечения цилиндра будем использовать только центральную ось симметрии $y_M = 0$.

Определение функции $\rho(\varphi)$ сводится к задаче поиска минимума регуляризованного функционала А.Н. Тихонова [8, 14].

$$\Phi(\rho) = W(x_M, \rho(\varphi)) + \alpha \cdot \Omega(\rho(\varphi)) = \int_c^d [A(x_M, \rho(\varphi)) - U^*(x_M)]^2 dx_M + \alpha \cdot \Omega(\rho(\varphi)) \rightarrow \min, \quad (7)$$

где $A(x_M, \rho) = \int_0^{2\pi} R(x_M, \rho(\varphi)) d\varphi$ – нелинейный интегральный оператор прямо-

го моделирования (4); $\Omega(\rho) = \int_0^{2\pi} [\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2] d\varphi$ – стабилизирующий функ-

ционал 2-го порядка; $U^*(x_M)$ – правая часть ИУ, которая на практике задаётся экспериментально, а для тестовых задач определяется путём решения прямой задачи по формулам (4) с добавлением случайной поправки, моделирующей погрешности натуральных измерений; $\alpha \ll 1$ – параметр регуляризации.

Указанный подход к решению нелинейных уравнений является одним из методов математического программирования. Проиллюстрируем его при решении двух учебных задач: простейшего нелинейного уравнения

$$\text{вида } x^2 = 4 \text{ и системы уравнений } \begin{cases} 2xy + y^2 = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}.$$

Решим первую задачу. Функция, минимум которой требуется найти, имеет вид: $F(x) = (x^2 - 4)^2$. Приведём её график (рисунок 2.а).

Нетрудно понять, что если решать эту задачу аналитически, требуемый минимум отыщется единственным образом. В самом деле, найдём первую производную и приравняем её к нулю $F'(x) = 2(x^2 - 4) \cdot 2x = 0$, откуда корни $x_1 = 0; x_2 = -2; x_3 = 2$. Найдём значения в этих точках второй производной функции F : $F''(x) = 4 \cdot (2x^2 - 4)$: $F''(0) = -16$, $F''(2) = F''(-2) = 16$. Следовательно, точки $x = \pm 2$ локального минимума; вычислим значения функции в них: $F(-2) = F(2) = 0$, следовательно, функция имеет два равных минимума, и они оба являются решением исходного уравнения. Недостаток аналитического рассмотрения заключается в том, что он не применим для более сложных уравнений. Если же применять численные методы решения задачи минимизации (метод «золотого сечения», например), то в качестве решения будем получать только одну из минимальных точек.

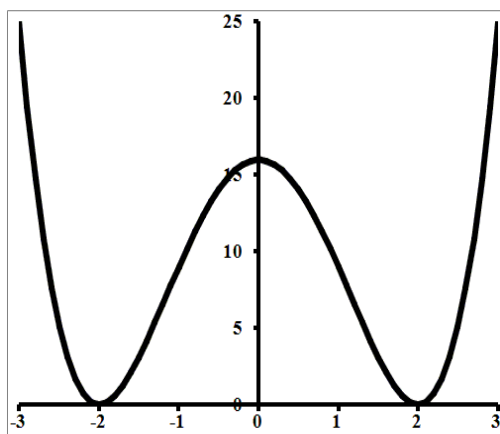


Рисунок 2.а.

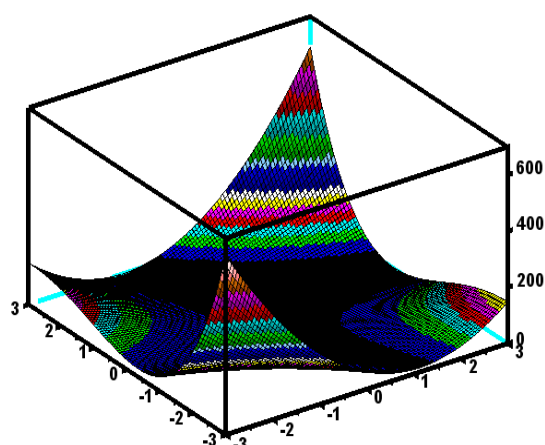


Рисунок 2.б.

Решим вторую задачу. Функция, минимум которой требуется найти, имеет вид: $F(x, y) = (2xy + y^2 - 3)^2 + (x + y - 2)^2$. Если попробовать решить эту задачу аналитически, то получим вспомогательную систему уравнений

ещё более сложного вида, чем исходная. Если же решать эту задачу численно, то будем также получать только одну из точек минимума, и кроме того встретимся с проблемой «оврагов», когда точки минимума будут расположены на дне практически плоской поверхности (рисунок 2.б).

Обнаруженные при рассмотрении даже простейших примеров проблемы будут тем более присутствовать и при решении исходной задачи (6) методом (7) в случае пространств гораздо большей размерности, чем два.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах/ А.Н. Тихонов, В.Б.Гласко// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., – 1965, т.5, № 3, – 463 – 473 с.

2. Тихонов А. Н. О приближённом решении интегральных уравнений Фредгольма 1 рода/ А.Н. Тихонов, В.Б.Гласко// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., –1964, т.4, № 3, – 564 – 571 с.

3. Бакушинский А. Б. Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский // –М.: МГУ, –1989, – 199 с.

4. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи/ С.И. Кабанихин// – Сибирское научное издательство, Новосибирск, – 2009, – 458 с.

5. Жданов, М.С. Геофизическая электромагнитная теория и методы / М. С. Жданов // М.: Научный мир, 2012, – 680 с.

6. Сирота, Д.Ю. Восстановление формы источника электрического поля как решение обратной задачи геоэлектрики / Д.Ю. Сирота // Вестник КузГТУ, 2015, № 6, с. 97 – 104.

7. Сирота, Д.Ю. Определение угла наклона и формы плоского источника электромагнитного поля по измерениям потенциала на земной поверхности / Д.Ю. Сирота, В.В. Иванов// Изв. Вузов. Горный Журнал, 2016 г, № 3, с. 89 – 96.

8. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков // –Киев: Наукова думка, –1986, – 544 с.

9. Васильева, А. Б. Интегральные уравнения / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов // –М.: ФИЗМАТЛИТ, – 2002. – 160 с.