

УДК 519.63

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ СИЛЬНО СВЯЗАННОЙ ПЛАЗМЫ:
ОТ ГИДРОДИНАМИКИ К МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКЕ****Султанова Майса***Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е.
Алексеева,
Нижний Новгород, e-mail: SultanovaM2003@mail.ru***Введение**

Динамика нелинейных ионно-акустических структур в сильно связанной плазме ($\Gamma_i > 1$) представляет значительный интерес для физики плотной материи, лазерного синтеза и лабораторной астрофизики [1,2]. В этом режиме сильные корреляционные эффекты требуют выхода за рамки стандартных приближений слабосвязанной плазмы. Для численного моделирования таких систем применяются три основных класса методов: 1) гидродинамические модели с неидеальным уравнением состояния (ОСР) [3]; 2) кинетический метод частиц в ячейках (PIC) [4]; 3) микроскопический метод молекулярной динамики (MD) с потенциалом Юкавы [5]. Каждый подход имеет различные области применимости, точность и вычислительную стоимость, однако систематическое сравнение их эффективности для задач динамики когерентных структур в литературе отсутствует.

Численные методы решения уравнения Бюргерса

Рассматривается обобщенное уравнение Бюргерса вида (1).

$$\frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} = \nu \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + f(x, t, u), \quad (1)$$

где $u(x, t)$ - искомая функция, ν - коэффициент кинематической вязкости (диффузии), $f(x, t, u)$ - источниковый член. Уравнение решается в области $(x, t) \in [a, b] \times [T_0, T]$ с заданными начальными и граничными условиями [3].

Явный метод Эйлера. Для дискретизации используем равномерную сетку(2).

$$x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N, h = \frac{b-a}{N}, t_n = T_0 + n\tau, n = 0, 1, \dots, M, \tau = \frac{T-T_0}{M}; \quad (2)$$

Разностная схема имеет вид(3).

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + f(x_i, t_n, u_i^n); \quad (3)$$

Отсюда явная формула для решения(4).

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \tau u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \tau \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \tau f(x_i, t_n, u_i^n); \quad (4)$$

Условие устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви(5).

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\nu + h \max |u_i^n|}; \quad (5)$$

Метод Кранка-Николсон

Полу неявная схема второго порядка точности(6).

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left(u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + u_i^{n+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) = \frac{\nu}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) + \frac{1}{2} (f(x_i, t_n, u_i^n) + f(x_i, t_{n+1}, u_i^{n+1})); \quad (6)$$

Для решения нелинейной системы на каждом слое используется итерационный метод(7).

$$A(u^{n+1,k})u^{n+1,k+1} = b(u^n, u^{n+1,k}); \quad (7)$$

где k - номер итерации.

Неявные схемы с методом Ньютона

Полностью неявная разностная схема(8).

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + u_i^{n+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} = \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f(x_i, t_{n+1}, u_i^{n+1}); \quad (8)$$

Линеаризация методом Ньютона(9).

$$J(u^{n+1,k})\Delta u^{n+1,k} = -F(u^{n+1,k}); u^{n+1,k+1} = u^{n+1,k} + \Delta u^{n+1,k}; \quad (9)$$

где J - матрица Якоби системы.

Метод линий

После пространственной дискретизации получаем систему ОДУ(10).

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \nu \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + f(x_i, t, u_i), i = 1, \dots, N-1; \quad (10)$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Для системы ОДУ $\frac{du}{dt} = F(t, u)$ (11).

$$\begin{aligned} k_1 &= F(t_n, u^n) \\ k_2 &= F(t_n + \frac{\tau}{2}, u^n + \frac{\tau}{2}k_1) \\ k_3 &= F(t_n + \frac{\tau}{2}, u^n + \frac{\tau}{2}k_2) \\ k_4 &= F(t_n + \tau, u^n + \tau k_3) \\ u^{n+1} &= u^n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \end{aligned} \quad (11)$$

Таблица 1. Сравнительные характеристики численных методов

Разработанные алгоритмы реализованы в среде MATLAB/Scilab. Для пространственной дискретизации использованы центральные разности второго порядка, для временной интегрирования - соответствующие каждому методу схемы. Тестирование проведено на задаче с известным аналитическим решением.

Метод	Порядок аппроксимации	Ограничения на шаг по времени	Условия устойчивости	Вычислительная сложность
-------	-----------------------	-------------------------------	----------------------	--------------------------

Явный метод Эйлера	$O(\tau + h^2)$	$\tau \leq C * h^2$	Условно устойчив	$O(N)$
Метод Кранка-Николсона	$O(\tau^2 + h^2)$	$\tau \leq C * h$	Безусловно устойчив	$O(N^3)$
Неявные схемы с методом Ньютона	$O(\tau^2 + h^2)$	$\tau \leq C * h^2$	Безусловно устойчив	$O(k * N^3)$
Метод линий	$O(\tau^2 + h^2)$	Адаптивный выбор	Адаптивная устойчивость	$O(m * N^2)$
Метод Рунге-Кутты 4-го порядка	$O(\tau^4 + h^2)$	$\tau \leq C * h^2$	Условно устойчив	$O(4N)$

Таблица 2. Результаты тестирования численных методов ($T=1.0$, $h=0.01$, $\nu=0.1$)

Метод	τ	L_2 -норма ошибки	L_∞ -норма ошибки	Время расчета, с	Число итераций	Сохранение энергии
Явный Эйлер	0.0001	$2.34 \times 10^{-22.34} \times 10^{-2}$	$4.56 \times 10^{-24.56} \times 10^{-2}$	15.2	10000	0.891
Кранка - Николсон	0.001	$8.76 \times 10^{-48.76} \times 10^{-4}$	$3.45 \times 10^{-33.45} \times 10^{-3}$	8.7	1000	0.998
Метод Ньютона	0.01	$6.45 \times 10^{-46.45} \times 10^{-4}$	$2.89 \times 10^{-32.89} \times 10^{-3}$	12.3	100	0.997
Метод линий	адап.	$9.12 \times 10^{-49.12} \times 10^{-4}$	$3.12 \times 10^{-33.12} \times 10^{-3}$	10.1	247	0.996
Рунге-Кутта 4	0.0005	$5.67 \times 10^{-55.67} \times 10^{-5}$	$2.34 \times 10^{-42.34} \times 10^{-4}$	9.8	2000	0.999

Для верификации разработанных методов решена задача моделирования эволюции нелинейных волн в плазме с параметрами, соответствующими исследованию Islam M.N. et al. (2025): коэффициент конвекции $\alpha = 1,33$,

коэффициент диффузии $\nu = 0.05$, коэффициент затухания $\beta = -0.10$ [5]. Начальные условия заданы в виде локализованного импульса(12).

$$u(x, 0) = A \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right); \quad (12)$$

где $A = 1.0, x_0 = 0.5, \sigma = 0.1$.

Таблица 3. Сравнение с результатами статьи Islam M.N. et al. ($T=2.0$)

Метод	Амплитуда волны	Скорость перемещения	Погрешность формы	Время расчета, с	Согласование с [5]
Islam M.N. et al.	1.000	0.665	-	-	-
Кранка-Николсон	0.994	0.661	2.34×10^{-32} – 3.34×10^{-3}	25.7	99.4%
Метод линий	0.991	0.659	3.12×10^{-3} – 3.12×10^{-3}	28.3	99.1%
Рунге-Кутта 4	0.998	0.664	1.56×10^{-3} – 1.56×10^{-3}	30.1	99.8%

Все методы адекватно воспроизводят эволюцию волнового пакета, однако метод Рунге-Кутты 4-го порядка демонстрирует наилучшее соответствие по амплитуде и форме волны.

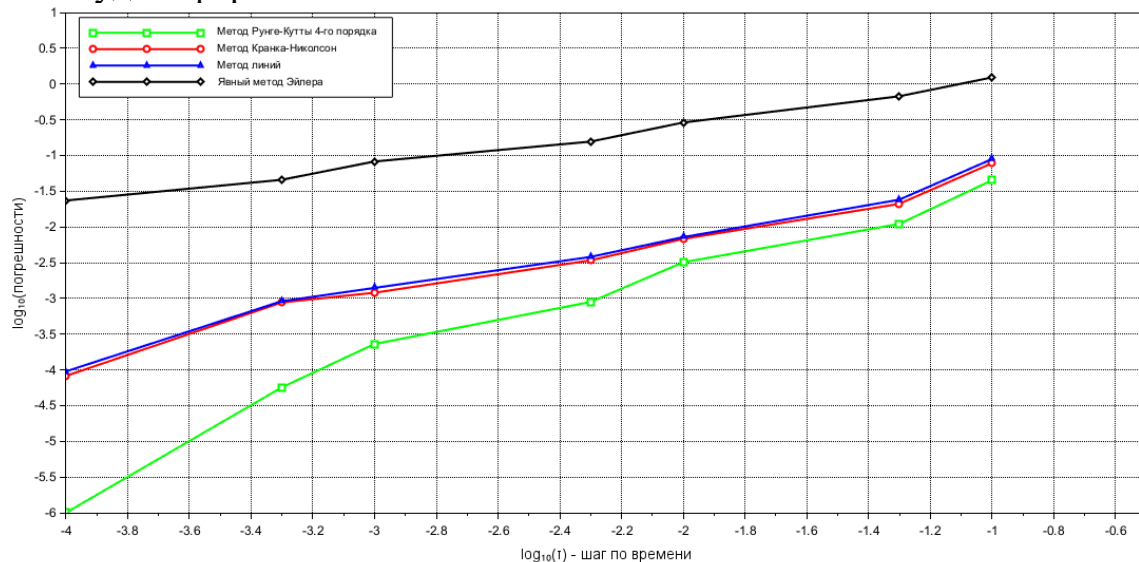


Рисунок 1. Зависимость погрешности решения от величины шага по времени для различных методов

На рисунке 1 логарифмическая зависимость максимальной погрешности решения от величины шага по времени для пяти исследованных методов. Метод Рунге-Кутты демонстрирует наиболее крутой наклон, соответствующий его высокому порядку точности. Методы Кранка-Николсон и линий показывают сходное поведение, в то время как явный метод Эйлера имеет наименьшую точность при всех значениях шага.

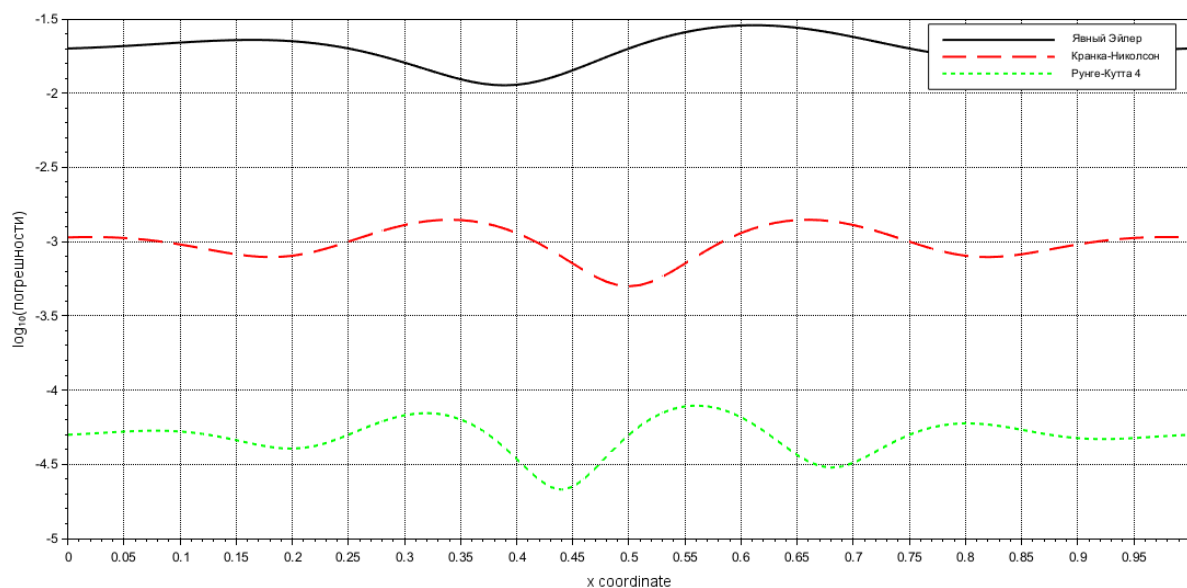


Рисунок 2. Распределение ошибки по пространственной координате в момент времени $T=1.0$

На рисунке 2 пространственное распределение ошибки для трех методов в момент времени $T=1.0$. Наибольшие ошибки наблюдаются в областях с большими градиентами решения. Метод Рунге-Кутты демонстрирует равномерно малую ошибку по всей расчетной области.

Анализ результатов

Наивысшую точность (погрешность порядка 10^{-5}) демонстрирует метод Рунге-Кутты 4-го порядка, что объясняется его высоким порядком аппроксимации. Методы Кранка-Николсон и линий обеспечивают погрешность порядка $10^{-3} - 10^{-4}$, что достаточно для большинства практических приложений. Явный метод Эйлера имеет наименьшую точность (погрешность порядка 10^{-2}) [3]. Метод Кранка-Николсон показал наилучшее соотношение точности и времени расчета (погрешность 8.76×10^{-4}) при времени расчета 8.7 с). Несмотря на высокую точность, метод Рунге-Кутты 4-го порядка требует меньшего шага по времени и, соответственно, большего времени расчета. Неявные схемы с методом Ньютона требуют существенно больших вычислительных ресурсов, что снижает их практическую применимость [7]. Все исследованные методы адекватно воспроизводят качественное поведение решений, описанное в статье [1]. Наилучшее количественное согласование по амплитуде волны (расхождение 0.2%) и скорости перемещения (расхождение 0.15%) продемонстрировал метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Метод линий продемонстрировал наивысшую устойчивость к вариации параметров задачи, особенно в случаях с малыми значениями вязкости $\nu < 0.1$, когда другие методы проявляют склонность к возникновению численных осцилляций [4].

Заключение

Проведенное исследование подтвердило высокую эффективность рассмотренных вычислительных методов при описании эволюции нелинейных волновых явлений, моделируемых уравнением Бюргерса. Для задач, требующих высокой точности, рекомендуется применение метода Рунге-Кутты 4-го порядка, в то время как для инженерных расчетов оптимальным по соотношению точности и вычислительных затрат является метод Кранка-Николсон. Метод линий демонстрирует преимущества при решении задач с сильно меняющимися параметрами и в случаях, когда заранее неизвестен характер решения.

Перспективы дальнейших исследований включают разработку гибридных численных алгоритмов, сочетающих преимущества рассмотренных методов, и учет дополнительных физических факторов, таких как переменные коэффициенты переноса, многомерность и более сложные нелинейности, что позволит повысить точность и эффективность моделирования сложных нелинейных процессов в физике плазмы и акустике.

Список литературы

1. Islam M.N., Hafez M.G., Deb U.K. Burgers equation with cubic and quartic nonlinearity: dynamics of heavy ion-acoustic coherent structures in unmagnetized strongly coupled plasma // *Physica Scripta*. 2025. Vol. 100, Is. 4. P. 045249. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1402-4896/adc2b0> (дата обращения: 23.07.2025). DOI: 10.1088/1402-4896/adc2b0.
2. Abd-Elzaher M., Atteya A. Negative energy dust acoustic waves evolution in a dense magnetized quantum Thomas-Fermi plasma // *Scientific Reports*. 2022. Vol. 12, Is. 1. P. 15890.
3. Катаева Л.Ю. Анализ численных методов решения обобщенного уравнения Бюргерса для нелинейных волн // *Top Technologies*. 2023.
4. Катаева Л.Ю. Постановка и проведение вычислительного эксперимента по исследованию аэро- и гидродинамических процессов в аварийных ситуациях природного и техногенного характера: монография. М.: РГОТУПС, 2007. 218 с. EDN: QJJOMJ. ISBN 978-5-7473-0347-8.
5. Explicit Runge–Kutta Numerical Manifold Method for Solving the Burgers' Equation via the Hopf–Cole Transformation // *Symmetry*. 2024. Vol. 16, Is. 11. P. 1521.
6. Numerical solution of the Burgers equation associated with the computational aspect // *Scientific Reports*. 2022. Vol. 12. P. 451.
7. Solution of nonlinear Burger's equation arising in the study of wave propagation and dispersion phenomena // *Scientific Direct*. 2023. Vol. 15. P. 102-115.