

УДК 519

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПАРАБОЛЫ

Ткаченко Е.Е., студент гр.ИМб-251

Научный руководитель, профессор Гоголин В.А.

Кузбасский государственный технический университет, г. Кемерово

Аннотация. Целью работы является расчет расстояния от точки плоскости до квадратичной параболы. Рассмотрены частные случаи расположения точки, для которых получены готовые формулы для расчета.

Известна формула вычисления расстояния от точки до прямой [1]. Студентами КузГТУ получены формулы, для вычисления расстояния между прямой и параболой [2] и между прямой и остальными кривыми второго порядка [3]. В данной работе рассматривается общий подход и частные случаи вычисления расстояния от точки до параболы.

Общая постановка задачи

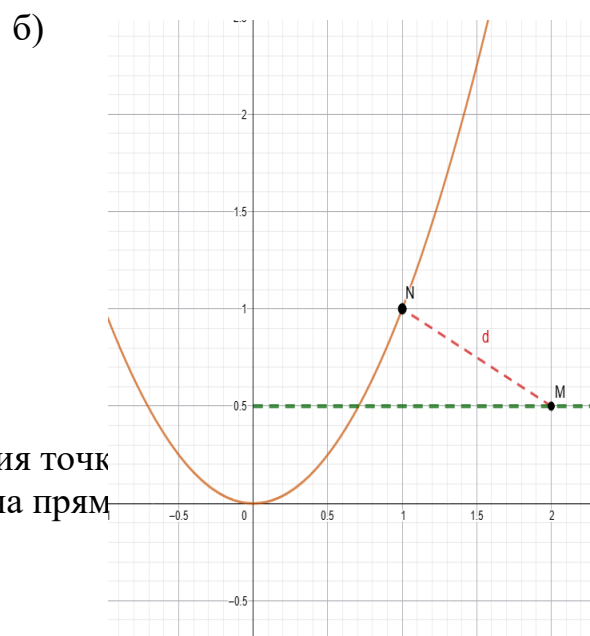
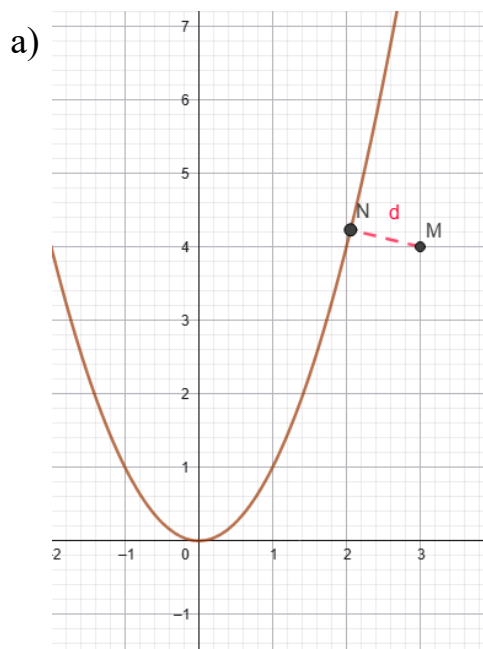
Задана парабола $y = ax^2$ и точка $M(x_0; y_0)$ (Рис. 1а). Расстояние от заданной точки $M(x_0; y_0)$ до точки $N(x; ax^2)$, лежащей на параболе, вычисляется по следующей формуле:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (ax^2 - y_0)^2}. \quad (1)$$

Непосредственное использование этой формулы затруднительно, так как координаты точки N неизвестны и требуют установления.

Для определения минимального значения этой функции найдем ее производную по x .

$$d' = \frac{2(x - x_0) + 2(ax^2 - y_0) \cdot 2ax}{2\sqrt{(x - x_0)^2 + (ax^2 - y_0)^2}}. \quad (2)$$



положения точек
 точки M на прям

Для нахождения критических точек x на экстремум приравняем к нулю числитель этой формулы, и после преобразований получим уравнение:

$$2a^2x^3 + (1 - 2ay_0)x - x_0 = 0. \quad (3)$$

В общем случае решение этого уравнения третьей степени возможно, но затруднительно. Рассмотрим частные случаи, имеющие решение.

Частные случаи

Случай 1. Выражение из (3):

$(1 - 2ay_0) = 0$. То есть точка M лежит на прямой $y = 1/2a$ (см. рис. 1б)

Ордината заданной точки определяется как $y_0 = 1/2a$.

Тогда уравнение (3) имеет вид

$$2a^2x^3 - x_0 = 0. \quad (4)$$

Координаты точки параболы N , в которой достигается наименьшее значение расстояния от заданной точки до параболы из (4) и из уравнения параболы определяются как

$$x_{\min} = \sqrt[3]{\frac{x_0}{2a^2}}, \quad y_{\min} = ax_{\min}^2.$$

Наименьшее расстояние от точки M до точки N вычисляется по формуле (1) и равно

$$d_{\min} = \sqrt{(x_{\min} - x_0)^2 + (ax_{\min}^2 - y_0)^2}. \quad (5)$$

Случай 2. Из (3) при $x_0 = 0$, имеем, что точка M лежит на оси симметрии параболы (Рис. 3).

В этом случае уравнение (3) принимает следующий вид:

$$2a^2x^3 + (1 - 2ay_0)x = 0.$$

Решим это уравнение:

$$x(2a^2x^2 + (1 - 2ay_0)) = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим 2 случая решения этого уравнения.

Случай 2а. Первый корень $x = 0$. Это означает, что наименьшим расстоянием до параболы есть расстояние от точки M до вершины параболы N (Рис. 2а).

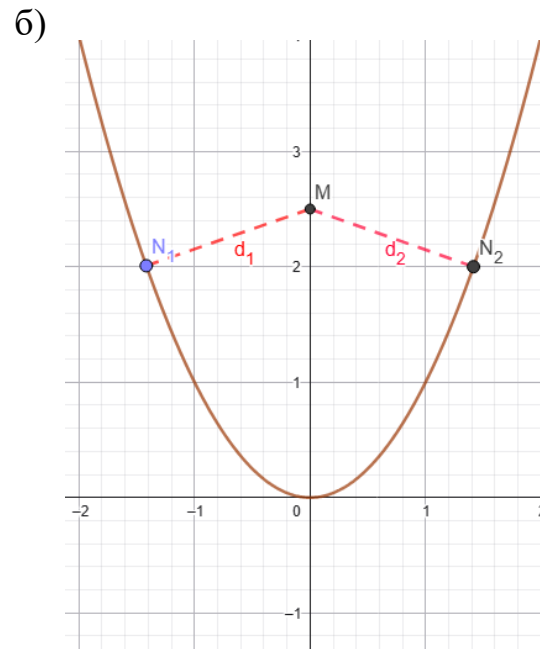
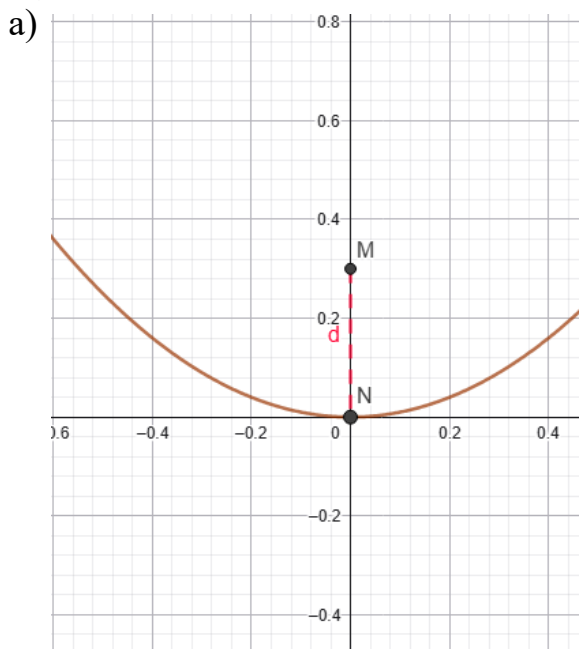


Рис. 2. Случай расположения точки M на оси симметрии параболы с наименьшим расстоянием до вершины параболы (а) и с наименьшим расстоянием до ветвей параболы (б)

Тогда точка N имеет координаты $x_{\min} = 0$ и $y_{\min} = 0$. Точка параболы с такими координатами является ее вершиной (Рис. 2а). Поэтому наименьшее расстояние в рассматриваемом случае от заданной точки на оси симметрии совпадает с ее ординатой, то есть

$$\boxed{\times}.$$
 (6)

Случай 2б. Вторая скобка уравнения (6): $\boxed{\times}$.

Наименьшее расстояние от точки M до ветвей параболы показано на рис. 2б).

Если $\boxed{\times}$, то уравнение (6) имеет еще два решения (см. рис. 2б):

$$\boxed{\times}.$$

Окончательно получаем, что

$$\boxed{\times}, \quad \boxed{\times}.$$

Наименьшее расстояние от точки оси симметрии до параболы в этом случае рассчитывается по формуле

$$\boxed{\times}.$$
 (7)

Таким образом, в работе получены формулы (5), (6), (7) вычисления наименьшего расстояния от точки до параболы при заданных координатах этой точки и известном уравнении параболы.

Список литературы:

1 Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии линейной алгебры [Текст]: учебник для студентов вузов / Д. В. Беклемишев. – М.: Физматлит, 2008.–312 с.

2 Булыгин И.А. Расстояние между параболой и прямой /И.А. Булыгин, Н.О. Камышникова, А.В. Дягилева // В сборнике: Сборник материалов X Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с межд. участием «Россия молодая», 2018, С. 74804.1–74804.4

3 Евтихеева А.Д. Расстояние между прямой и кривой второго порядка А.Д. Евтихеева, Е.А. Слонов // В сборнике: Сборник материалов XV Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с межд. участием «Россия молодая», 2022, С. 094811.1-094811.5.