

УДК 378

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики

Черников И.Д., студент гр.МСб-251, I курс

Кузбасский государственный технический университет

имени Т.Ф. Горбачева

г. Кемерово

В статье представлен способ нахождения решения уравнений полиномиального вида. Покажем его на примере, представленном ниже.

Пример. Решить уравнение:

$$\frac{q^{p+1}}{q+1} = p, p, q \in N. (1)$$

Из уравнения (1) следует

$$p-1 = \frac{q^{p+1}}{q+1} - 1 = \frac{q^p - q}{q+1} = \frac{q(q^{p-1}-1)}{q+1}. \text{ то есть,}$$

$$p-1 = \frac{q(q^{p-1}-1)}{q+1} \quad (p > 1). (2)$$

1) При $p = 1$ уравнение (1) является тождеством $\forall q \in N$

2) Пусть $p \geq 2$. Перепишем (2) эквивалентным образом

$$p-1 = \frac{[q(q+1)-1](q^{p-1}-1)}{q+1} = (q^{p-1} - 1) - \frac{q^{p-1}-1}{q+1}, \text{ то есть}$$

$$p-1 = (q^{p-1} - 1) - \frac{q^{p-1}-1}{q+1} \text{ откуда получаем}$$

$$\frac{q^{p-1}-1}{q+1} = q^{p-1} - p - \text{целое, так как } q^{p-1} \in Z \text{ и } p \in Z, \text{ то } \frac{q^{p-1}-1}{q+1} \in Z, \text{ то есть}$$

$$(q^{p-1} - 1) \text{ кратно } (q+1). (3)$$

Тогда из (2) и (3) следует, что $(p-1)$ кратно q , а значит,

$$q \leq p-1. (4)$$

Отметим, что в силу (3), из (1) имеем

$$q+1 \leq p \Rightarrow \frac{1}{q+1} \geq \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{q^{p+1}}{q+1} \geq \frac{2^{p+1}}{p} \text{ при } q \geq 2. \text{ Т.о.,}$$

Принимая во внимание (1), запишем

$$p = \frac{q^{p+1}}{q+1} \geq \frac{2^{p+1}}{p} \text{ или } \frac{2^{p+1}}{p} \leq p, \text{ откуда получим, если умножить на } p, \text{ что}$$

$$2^p + 1 \leq p^2 + 1, \text{ то есть } 2^p + 1 < p^2 + 1 \Leftrightarrow 2^p < p^2.$$

Логарифмируя последнее неравенство по основанию числа e , получаем (т.к. функция $y = \ln t$ возрастает):

$$\ln(2^p) < \ln(p^2) \text{ или } p \ln 2 < 2 \ln p, \text{ то есть}$$

$$p \ln 2 - 2 \ln p < 0, (5)$$

где $p \geq 2, q \geq 2$.

Рассмотрим функцию $h(x) = x \ln 2 - 2 \ln x, x > 0$. Исследуем её на экстремум.

$h'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x}$. Найдем критические точки: $h'(x) = 0$, откуда следует, что $\ln 2 = \frac{2}{x} \Rightarrow x_0 = \frac{2}{\ln 2} = 2,89$ – критическая точка функции. Исследуем ее на монотонность.

I) $h'(1) = \ln 2 - 2 < 0$, поэтому $h(x)$ убывает;

II) $h'(3) = \ln 2 - \frac{2}{3} \approx 0,026 > 0$, поэтому $h(x)$ возрастает.

Т.о., $x_0 = \frac{2}{\ln 2}$ – точка минимума функции $h(x)$. Поэтому, в частности, функция $h(x)$ возрастает и при $x \geq 3$.

Найдём знак $h(3)$, где 3 – ближайшее к x_0 , большее x_0 : $h(3) = 3 \ln 3 = \ln(2^3/3^2) = \ln \frac{8}{9} < 0$, так как $\frac{8}{9} < 1$, то есть $h(3) < 0$. Отметим, что

$P = 3$ удовлетворяет условию (5). Но $h(4) = 0$, т.е. не удовлетворяет условию (5). Поэтому в силу возрастания $h(x) \forall x \geq 3$, имеем:

$$h(x) \geq 0 \forall x \geq 4, (6)$$

откуда следует при $x = p \in N$, что $p \ln 2 - 2 \ln p \geq 0; p \geq 4 \in N$,

а это противоречит неравенству (5).

Следовательно, если уравнение (1) имеет решения в натуральных числах, то $p \leq 3$.

Потому осталось проверить следующие варианты:

а) $p=2$. Тогда уравнение (1) имеет вид

$$\frac{q^2+1}{q+1} = 2 \Rightarrow q^2 + 1 = 2q + 2 \text{ или}$$

$$q^2 - 2q - 1 = 0. (7)$$

Если уравнение (7) имеет целые (в частности, натуральные) корни, то они являются делителями числа $-1/1 = -1$, то есть $q = 1$.

Но $1^2 - 2 * 1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow q = 1$ не является корнем данного уравнения.

б) $P = 3$. В этом случае (1) запишем следующим образом:

$$\frac{q^3+1}{q+1} = 3 \text{ или } \frac{(q+1)(q^2-q+1)}{q+1} = 2 \Leftrightarrow q^2 - q + 1 = 3, \text{ т.е.}$$

$$q^2 - q - 2 = 0. (8)$$

Натуральные корни этого уравнения — это натуральные делители числа $-2/1 = -2$, то есть числа из множества $\{1;2\}$. При $q = 1$ подстановкой в уравнение (7) убеждаемся, что $1^2 - 1 - 2 = -2 \neq 0$, то есть $q = 1$ не является корнем (8). Аналогично, подставляя $q = 2$ в (8), запишем

$2^2 - 2 - 2 = 0$ (истинно), то есть $q = 2$ — корень этого уравнения. Следовательно, $p = 3, q = 2$ это решение уравнения (1) в натуральных числах.

Объединяя итоги анализа пунктов 1) и 2), получим окончательный ответ:

$p = 1; q \in N$ — любое; $p = 3; q = 2$. Отметим, что поскольку $p = 3$ и $q = 2$ — простые, то это единственное решение (1) в простых числах.

Замечание. Рассмотрим, по аналогии с левой частью уравнения (1), функцию, получаемую заменой натуральной переменной q на непрерывную x :

$$r(x) = \frac{x^{p+1}}{x+1}. \text{ Тогда } r(x) - 1 = \frac{x^{p+1}}{x+1} - 1 = \frac{x(x^{p-1}-1)}{x+1}. \text{ Обозначая}$$

$$R(x) = \frac{x(x^{p-1}-1)}{x+1}, \text{ отсюда получим}$$

$$x(x^{p-1} - 1) = R(x)(x + 1), (9)$$

где $R(x)$ — многочлен от x степени $p-1$. При $x = -1$ из (9) найдём:

$-1 * ((-1)^{p-1} - 1) = R(-1) * 0 = 0$ или $(-1)^p + 1 = 0 \Rightarrow (-1)^p = -1$, откуда следует, что p — нечётно, поэтому случай $p = 2$ (см. п.2а)) можно было не рассматривать.

Список литературы:

1. В.Н. Березин, Л.Ю. Березина. «Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике». Москва «Просвещение», 1985, стр. 176.