

УДК 378

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К НАХОЖДЕНИЮ КОРНЕЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики
Лукашов Р.А., студент гр. МСб-251, I курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В статье представлен 1 подход к решению полиномиальных уравнений, который покажем на следующем примере.

Пример. Найти решение уравнения в простых числах

$$\frac{q^p - 1}{q - 1} = p, (1)$$

где $p, q \in \mathbb{P}$, $\mathbb{P}$ - множество простых чисел.

Отметим, что при $p = 1$ уравнение вида (1) примет вид:

$$\frac{q^1 - 1}{q - 1} = 1 \text{ или } 1 = 1, \text{ то есть становится тождеством для любого } q \in \mathbb{P}.$$

Наоборот, при $q = 1$ левая часть уравнения (1) не имеет смысла (возникает 0 в знаменателе), а значит решений нет. Так как $p, q \in \mathbb{P}$ – простые числа, то будем считать, что

$$p \geq 2, q \geq 2, p, q \in \mathbb{P}. (2)$$

При $p = 2$ уравнение (1) таково:

$$\frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1 = 2,$$

откуда следует, что $q = 1$, т.е. не является простым.

Учитывая, что q^k возрастает при $q > 1$ и $k \in \mathbb{N}$, запишем с учетом (2):

$$\frac{q^p - 1}{q - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} q^k \geq \sum_{k=0}^{p-1} 2^k$$

Будем считать, что $p \geq 3$ нечетно. Таким образом, получим

$$\frac{q^p - 1}{q - 1} \geq \sum_{k=0}^{p-1} 2^k = \frac{2^p - 1}{2 - 1} = 2^p - 1$$

В итоге имеем

$$\frac{q^p - 1}{q - 1} \geq 2^p - 1 \quad (3)$$

Тогда из (1) и (3) следует

$$p = \frac{q^p - 1}{q - 1} \geq 2^p - 1 \Rightarrow p \geq 2^p - 1,$$

то есть

$$2^p - p - 1 \leq 0, \quad (4)$$

где $p \in \mathbb{P}$ – простое, нечетное.

Таким образом, решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2) (если они существуют), должны удовлетворять неравенству (4).

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 2^x - x - 1 \quad (5)$$

и исследуем ее на экстремум, где переменная x принимает непрерывные значения $x \geq 1$,

Найдем производную $f'(x) = 2^x \ln(2) - 1$. Тогда критические точки $f(x)$ определим из условия

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow 2^x \ln(2) - 1 = 0 \Rightarrow 2^x = \frac{1}{\ln(2)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \ln(2) = \ln\left(\frac{1}{\ln(2)}\right) = -\ln(\ln 2), \end{aligned}$$

откуда найдем

$$x_0 = \frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx 0.53$$

– критическая точка функции (5). Исследуем знак $f'(x)$:

I) $f'(0) = \ln(2) - 1 < 0$, так как $\ln(2) < \ln(e) = 1$, где $e = 2.718 \dots > 2$. Следовательно, $f(x)$ убывает при $x < x_0$.

II) $f'(1) = 2\ln(2) - 1 = \ln(2^2) - \ln(e) = \ln\left(\frac{4}{e}\right) > 0$, так как $e < 4 \Rightarrow \frac{4}{e} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{4}{e}\right) > 0$.

Таким образом $f(x)$ возрастает при $x > x_0$. Это означает, что $x_0 \approx 0.53$ – точка минимума $f'(x)$. В частности, $f(x)$ возрастает $\forall x \geq 1$, то есть

$$f(x) \geq f(1) = 0 \text{ или, в силу (5),}$$

$$2^x - x - 1 \geq 0, x \geq 1, (6)$$

откуда следует, что $2^p - p - 1 > 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}$, где p нечетно, что противоречит (4). Таким образом, уравнение (1) не имеет решений при $p \geq 3, q \geq 2, p \in \mathbb{P}, q \in \mathbb{P}$.

Заметим, что можно доказать более общее утверждение: уравнение (1) не имеет решений даже в натуральных числах $p, q \geq 2, p, q \in \mathbb{N}$.

Действительно, перепишем (1) равносильно

$$q^p - pq + (p - 1) = 0. (1')$$

Исследуем на экстремум функцию:

$$g(x) = x^p - px + (p - 1), p \geq 2. (7)$$

Тогда

$$g'(x) = px^{p-1} - p.$$

Найдем критические точки:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow px^{p-1} - p = p(x^{p-1} - 1) = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

– критическая точка.

I) $g'(0) = -p < 0$, так как $0^{p-1} = 0$ при $p \geq 2 > 1$.

II) $g'(2) = p(2^{p-1} - 1) > 0, p \geq 2$.

Таким образом $x_0 = 1$ – точка минимума функции (7). Поэтому

$g(x) \geq g(1) = 0$, то есть доказали неравенство:

$$x^p - px + (p - 1) \geq 0 \quad \forall x \geq 1, p \geq 2. (8)$$

В частности, при $x = q \geq 2$ неравенство (8) будет строгим, то есть

$$q^p - pq + (p - 1) > 0 \quad \forall p \geq 2, q \geq 2, q \in \mathbb{N}. (8')$$

Тогда из (8'), в свою очередь следует, что (1') не имеет решений $\forall p, q \geq 2, p, q \in \mathbb{N}$. Поскольку при $p, q \geq 2, p, q \in \mathbb{N}$ уравнение (1') эквивалентно (1), то в итоге доказали, что (1) не имеет решений для всех $p, q \geq 2, p, q \in \mathbb{N}$.

Поэтому уравнение (1') может быть разрешимо лишь для натуральных $p < 2$ или $q < 2$, то есть при $p = 1$ или $q = 1$. Если $p = 1$, то (1') становится тождеством. Аналогично (1') при $q = 1$ примет вид тождества.

Список литературы:

1. В.Н. Березин, Л.Ю. Березина. «Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике». Москва «Просвещение», 1985, стр. 176.