

УДК 519

**МЕТОД НЬЮТОНА-РАФСОНА: ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОДХОД К
РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ**

Панюков Д.В. студент гр. МСс–241, II курс
Шестова А.В., студент гр. МСс – 241, II курса
Научный руководитель: Подкур П. Н., к. ф.-м. н., доцент
Кузбасский государственный технический
университет имени Т.Ф.Горбачёва
г. Кемерово

Введение

В математике, физике, инженерии и экономике часто возникают задачи, требующие решения нелинейных уравнений или систем подобным им. В отличие от линейных случаев, где существуют прямые методы решения, нелинейные задачи, как правило, не имеют аналитического решения в замкнутой форме. Это привело к развитию численных методов - алгоритмов, позволяющих находить приближенные решения с заданной точностью. Среди множества численных методов особое место занимает метод Ньютона-Рафсона (также известный как метод Ньютона или метод касательных), отличающийся высокой скоростью сходимости и относительной простотой реализации.

Метод Ньютона-Рафсона является итерационным алгоритмом, то есть он генерирует последовательность приближений, которая, при определенных условиях, сходится к точному решению. Основная идея метода заключается в линеаризации функции на каждом шаге: сложная нелинейная функция аппроксимируется своей касательной, а корень этой линейной аппроксимации принимается за следующее приближение.

В данной статье будут подробно рассмотрены теоретические основы метода для уравнений с одной переменной, его обобщение на системы нелинейных уравнений, практический пример применения, обсуждение преимуществ и ограничений, а также условия сходимости.

Актуальность

Метод Ньютона-Рафсона сохраняет фундаментальную значимость в современных научных и инженерных вычислениях. Его высокая скорость сходимости делает его незаменимым инструментом в задачах оптимизации, машинного обучения, компьютерного моделирования и анализа данных. Понимание этого метода лежит в основе многих алгоритмов, решающих сложные нелинейные задачи в реальных технических и экономических системах.

1. Теоретические основы метода для одного уравнения

Рассмотрим уравнение вида:

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ - дифференцируемая функция. Предположим, что нам известно некоторое начальное приближение x_0 к корню x^* . Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2).$$

Если отбросить члены высшего порядка малости и приравнять линейное приближение к нулю, получим:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

Решая это линейное уравнение относительно x , находим следующее приближение:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Эта формула является ядром метода Ньютона-Рафсона. Общая итерационная формула записывается как:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Геометрическая интерпретация метода наглядна: на каждом шаге мы проводим касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_n, f(x_n))$ и находим точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Эта точка и становится следующим приближением x_{n+1} .

2. Обобщение на системы нелинейных уравнений

Метод Ньютона естественным образом обобщается на случай системы m нелинейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0. \end{cases}$$

Введем вектор неизвестных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ и вектор-функцию $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$. Тогда систему можно записать в компактном виде:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Аналогом производной в многомерном случае является матрица Якоби $J(\mathbf{x})$ - матрица, составленная из частных производных:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Разложение в ряд Тейлора для вектор-функции в окрестности точки $\mathbf{x}_n$ принимает вид:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) + J(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n).$$

Приравнивая это приближение к нулю, получаем линейную систему относительно приращения $\Delta \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n$:

$$J(\mathbf{x}_n)\Delta \mathbf{x}_n = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_n).$$

Таким образом, каждая итерация метода Ньютона для систем состоит из двух шагов:

1. Решить линейную систему $J(\mathbf{x}_n)\Delta \mathbf{x}_n = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$ относительно $\Delta \mathbf{x}_n$.
2. Обновить приближение: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}_n$.

3. Пример применения метода (с формулами)

Рассмотрим практический пример нахождения корня нелинейного уравнения с одной переменной.

Задача: найти положительный корень уравнения:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Это уравнение известно как уравнение Рафсона, которое сам Ньютон использовал для демонстрации своего метода.

Решение:

1. **Вычислим производную:** $f'(x) = 3x^2 - 2$.
2. **Выберем начальное приближение.** Проанализируем функцию: $f(2) = 8 - 4 - 5 = -1$, $f(3) = 27 - 6 - 5 = 16$. Корень лежит между 2 и 3. Возьмем $x_0 = 2$.
3. **Применим итерационную формулу Ньютона:**

Итерация 1 ($n = 0$):

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 5 = 8 - 4 - 5 = -1. \\ f'(x_0) &= 3 \cdot 2^2 - 2 = 12 - 2 = 10. \end{aligned}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{-1}{10} = 2 + 0.1 = 2.1.$$

Итерация 2 ($n = 1$):

$$f(x_1) = f(2.1) = (2.1)^3 - 2 \cdot 2.1 - 5 = 9.261 - 4.2 - 5 = 0.061.$$

$$f'(x_1) = 3 \cdot (2.1)^2 - 2 = 3 \cdot 4.41 - 2 = 13.23 - 2 = 11.23.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.1 - \frac{0.061}{11.23} \approx 2.1 - 0.00543 \approx 2.09457.$$

Итерация 3 ($n = 2$):

$$f(x_2) \approx f(2.09457) = (2.09457)^3 - 2 \cdot 2.09457 - 5 \approx 9.1896 - 4.18914 - 5 = 0.00046.$$

$$f'(x_2) \approx 3 \cdot (2.09457)^2 - 2 \approx 3 \cdot 4.3872 - 2 \approx 13.1616 - 2 = 11.1616.$$

$$x_3 \approx 2.09457 - \frac{0.00046}{11.1616} \approx 2.09457 - 0.000041 \approx 2.094529.$$

Уже после трех итераций мы получили приближение $x_3 \approx 2.094529$, которое с высокой точностью соответствует известному корню $x^* \approx 2.094551$. Метод показал очень быструю сходимость.

4. Условия сходимости, преимущества и недостатки

Метод Ньютона-Рафсона обладает квадратичной скоростью сходимости в окрестности корня, при выполнении определенных условий. Это означает, что число верных знаков примерно удваивается на каждой итерации. Однако сходимость гарантирована не всегда.

Условия сходимости:

1. Начальное приближение x_0 должно быть достаточно близко к истинному корню.
2. Функция $f(x)$ должна быть непрерывно дифференцируемой в окрестности корня.
3. Производная $f'(x)$ не должна обращаться в ноль в корне и его окрестности ($f'(x^*) \neq 0$).

Преимущества метода:

- **Высокая скорость сходимости** (квадратичная) при хорошем начальном приближении.
- **Относительная простота концепции и реализации** для уравнений с одной переменной.

Недостатки и проблемы:

- **Зависимость от начального приближения.** При неудачном выборе x_0 метод может расходиться или сходиться к другому, нежелательному корню.
- **Необходимость вычисления производной.** Если производная неизвестна или сложна для вычисления, приходится использовать её численные аппроксимации (метод секущих - упрощенная модификация).
- **Проблемы, когда $f'(x_n) \approx 0$.** Если производная близка к нулю, значение поправки $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ может стать очень большим, что уведет итерационный процесс далеко от корня.
- **Вычислительная сложность для систем.** На каждом шаге требуется вычислять матрицу Якоби и решать систему линейных уравнений, что может быть ресурсоемко для больших систем.

5. Модификации метода

Для преодоления некоторых недостатков классического метода были разработаны его модификации:

- **Метод Ньютона с фиксированным шагом (затухающий метод Ньютона):** вводится параметр релаксации λ_n : $x_{n+1} = x_n - \lambda_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $0 < \lambda_n \leq 1$. Это помогает стабилизировать сходимость.
- **Метод Ньютона для уравнений с кратным корнем:** если x^* - корень кратности m , формула модифицируется: $x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- **Квазиньютоновские методы (например, метод Бroyдена):** применяются для систем и позволяют избежать трудоемкого вычисления матрицы Якоби на каждой итерации, обновляя её приближение по результатам предыдущих шагов.

Заключение

Метод Ньютона-Рафсона остается одним из краеугольных камней вычислительной математики. Его элегантность, основанная на принципе линеаризации, в сочетании с феноменальной скоростью сходимости, делает его первым кандидатом для решения многих нелинейных задач. Несмотря на свои ограничения, такие как чувствительность к начальному приближению и необходимость вычисления производных, он служит основой для целого семейства более сложных и устойчивых алгоритмов. Понимание работы этого метода является обязательным для любого специалиста, занимающегося численными методами, и иллюстрирует мощный подход к решению сложных проблем через их последовательное упрощение.

Список литературы:

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003.
3. Дэниэл Дж.У., Бишоп Р.Е. Вычислительная математика. – М.: Наука, 1976.
4. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. – Philadelphia: SIAM, 2000
5. Newton, I. De analysi per aequationes numero terminorum infinitas (1669, опубликовано в 1711).
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.
7. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – Т. 3.
8. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. – 3rd ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007.