

УДК 519.83

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

Мусина А.А., студент гр. ЭБ-21, II курс

Научный руководитель: Филина Н.А., к.т.н., доцент кафедры безопасности
жизнедеятельностиФГБОУ ВО «Поволжский государственный технологический университет»
г. Йошкар-Ола

Статья посвящена практическому решению матричных антагонистических игр (игр с нулевой суммой) как инструменту для анализа конфликтов с противоположными интересами сторон: стратегическая неопределённость, одноходовость, конечность числа стратегий и отсутствие обмена информацией между игроками. Рассматриваются основные характеристики таких игр. В работе представлен алгоритм решения игры 2×2 , Особое внимание уделяется сферам практического применения метода — от экономики и военного дела до политологии и сельского хозяйства. Работа над решением матричных антагонистических игр не только обогащает теоретические знания в области теории игр, но и имеет практическое значение для различных сфер деятельности.

Матричная игра – это конечная антагонистическая игра двух игроков с нулевой суммой, в которой выигрыши первого игрока задаются в виде матрицы.

Особенности:

- Стратегическая. Неопределённость исходит от противной стороны.
- Одноходовая. Каждый участник выбирает один допустимый ход из совокупности доступных ему действий. После того как все игроки совершили свой выбор, игра завершается и наступает итоговая ситуация.
- Конечная. У каждого игрока конечное число стратегий.
- Игроки действуют изолированно и самостоятельно, не обмениваясь информацией.
- Строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец – номеру применяемой стратегии второго игрока.
- На пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям.
- Проигрыш второго игрока равен выигрышу первого.[1]

В такой игре участвуют два игрока, например А и В, у которых антагонистические интересы: выигрыш одного игрока равен проигрышу второго. Игрок А хочет максимизировать свой выигрыш, а игрок В – минимизировать проигрыш.

Допустим, у игрока А есть m возможных стратегий, а у противника – n возможных стратегий (такая игра называется игрой $m \times n$). Выигрыш игрока А

в случае, если он воспользуется стратегией A_i , а игрок B – стратегией B_j , обозначается через a_{ij} . Предполагается, что выигрыш a_{ij} известен.

Чтобы решить антагонистическую игру, нужно для каждого из игроков указать стратегии, которые будут удовлетворять условию оптимальности. Это значит, что игрок A должен получить максимально возможный выигрыш, когда игрок B будет придерживаться исключительно своей выбранной стратегии, а игрок B должен получить минимально возможный проигрыш, когда игрок A также будет придерживаться исключительно своей выбранной стратегии. [2]

Оптимальной стратегией игрока в матричной игре называется такая, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш. Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры.

Навыки решения матричных антагонистических игр используются в различных областях, где необходимо моделировать конфликтные ситуации с противоположными интересами сторон.

Некоторые сферы применения:

- Экономика. Антагонистические игры помогают принимать управленческие решения, учитывая неопределённость, неполноту информации, конфликтность и связанные с ними экономические риски. Например: данные знания применяются при создании рациональных запасов сырья, материалов, полуфабрикатов, а также при осуществлении совместных проектов, когда надо выработать варианты прогнозных сценариев поведения соперников.

- Военное дело. Теория игр служит инструментом для моделирования управления динамическими объектами (такими как самолёты, ракеты, корабли) в условиях конфликта и неопределённости. Классическим примером её применения является анализ артиллерийской дуэли.

- Политология. С помощью теории игр моделируют различные политические процессы. Она используется, в частности, для исследования модели гонки вооружений или стратегического взаимодействия государств на международной арене.

- Сельское хозяйство. С помощью матричных игр можно моделировать планирование посева, где одной из сторон выступает сельскохозяйственное предприятие, а другой – природа, преследующая прямо противоположные цели.[3]

Далее приведем пошаговый пример решения игры 2×2 , включающий проверку наличия седловой точки и нахождение оптимальных смешанных стратегий через систему уравнений (принцип равновесия). Решение проиллюстрировано на подробном численном примере с графической интерпретацией.

Таблица 1. Пример платежной матрицы

Иг- роки	B_1	B_2	$a = \min(A_i)$
A_1	2	1	1
A_2	0	3	0
$b = \max(B_i)$	2	3	

1.Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях. Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a = \max(a_i) = 1$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_1 . Верхняя цена игры $b = \min(b_j) = 2$.

Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как $a \neq b$, тогда цена игры находится в пределах $1 \leq y \leq 2$. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Объясняется это тем, что игроки не могут объявить противнику свои чистые стратегии: им следует скрывать свои действия. Игру можно решить, если позволить игрокам выбирать свои стратегии случайным образом (смешивать чистые стратегии).[4]

2.Ожидаемый выигрыш игрока А при выборе стратегии B_1

$$E_A(B_1) = x \cdot a_{11} + (1 - x) \cdot a_{21}$$

(где x вероятность, что игрок А выберет первую стратегию; $1-x$ игрок А выбирает вторую стратегию)

$x \cdot a_{11}$ - вклад выигрыша от выбора A_1 при выборе B_1

$(1 - x) \cdot a_{21}$ - вклад выигрыша от выбора A_2 при выборе B_1

$$E_A(B_1) = x \cdot 2 + (1 - x) \cdot 0 = 2x$$

Аналогично ожидаемый выигрыш игрока А при выборе стратегии B_2

$$E_A(B_2) = x \cdot 1 + (1 - x) \cdot 3 = -2x + 3$$

Чтобы найти вероятность, с которой игрок А выберет тот или иной путь приравняем полученные значения $E_A(B_1)$ и $E_A(B_2)$ (Равновесие Нэша)

$$2x = -2x + 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

т.о. игрок А выберет стратегию A_1 с вероятностью $\frac{3}{4}$, а стратегию A_2 с вероятностью $\frac{1}{4}$

Аналогично находим в ожидаемый проигрыш игрока В при выборе стратегий A_1 и A_2 .

$$E_B(A_1) = y \cdot 2 + (1-y) \cdot 1 = y + 1$$

$$E_B(A_2) = y \cdot 0 + (1-y) \cdot 3 = -3y + 3$$

Чтобы найти вероятность, с которой игрок В выберет тот или иной путь приравняем полученные значения $E_B(A1)$ и $E_B(A2)$

$$y + 1 = -3y + 3$$

$$y = 1/2$$

т.о. игрок В выберет стратегию В1 с вероятностью $1/2$, и стратегию В2 с вероятностью $1/2$

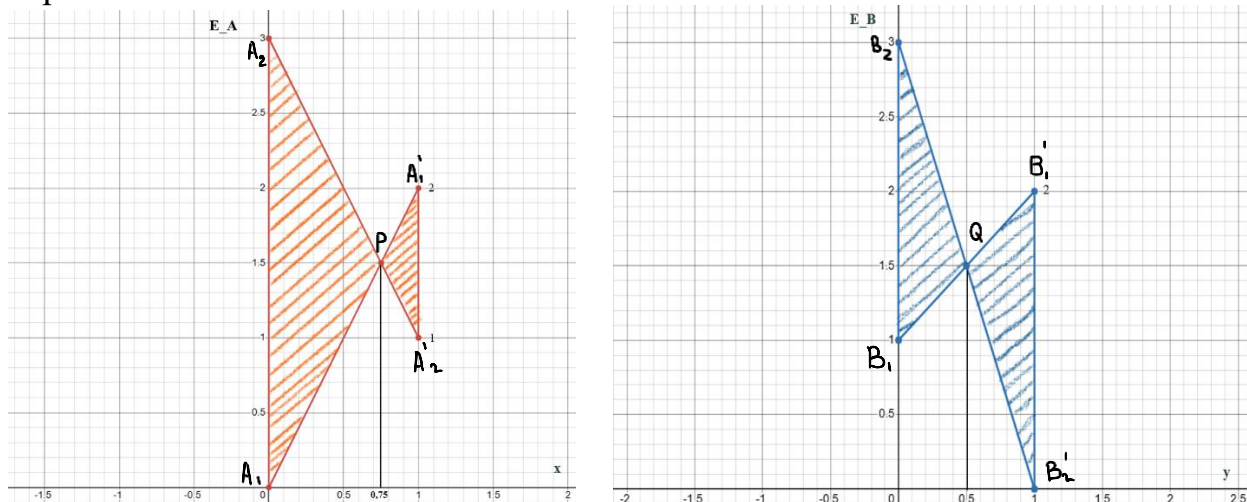


Рис.1 Графическое решение матричной игры 2×2

Каждое из этих уравнений может быть изображено графически отрезком прямой линии в области $[0,1]$ на графике с координатами x и E_A . Отрезки $A1A'1$ и $A2A'2$ пересекаются в точке Р. Промежуточные значения E_A , соответствующие точкам между этими графиками, получаются, если Игрок В применяет смешанные стратегии. Меньшая из этих величин, соответствующая каждому значению x , показывает тот минимум, который может получить Игрок А, выбирая стратегию $(x, (1-x))$. Следовательно, линия $PA1A2'$ показывает платеж, который Игрок А может гарантированно получить при любой стратегии Игрока В. Игрок А выбирает такое значение x , чтобы достичь наивысшей точки. Для первого графика этой точкой является точка Р, для которой $x=0,75$ и $E_A=1,5$.

Аналогично может быть проанализирована игра для Игрока В, который использует свою первую стратегию с вероятностью y , а вторую - с вероятностью $(1-y)$. На втором графике ломанная линия $B2QB1$, представляет наибольший проигрыш Игрока В при различных выборах y . Игрок В выбирает y так, чтобы достичь низшей точки на этой линии, т.е. точки Q, для которой $y = 0,5$ и $E_B = 1,5$ [5]

Вывод:

Следовательно, игроки должны применять свои тактики с вероятностью 0,75 и 0,5, и цена игры будет равна 1,5 т.е. описанная игра справедлива. Освоение методов решения матричных антагонистических игр развивает стратегическое мышление. Проведенное исследование подтверждает, что решение является не только классическим разделом математической теории игр, но и инструментом для анализа и разрешения конфликтов в условиях строгого противопоставления интересов. Умение решать матричные антагонистические игры

помогает принимать взвешенные решения в ситуациях с противоположными интересами участников в самых разных сферах жизни общества от экономики и военного дела, до управления природопользованием, где выигрыш одного равен проигрышу другого.

Список литературы:

1. Г.А.Обухова ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ИГР Методическое пособие [Электронный ресурс] - Режим доступа URL: https://edu.rubinst.ru/resources/books/Obukhova_G.A._Lektsii_po_teorii_igr_2012.pdf (Дата обращения 17.11.2025)
2. Основные понятия теории игр [Электронный ресурс] - Режим доступа URL: <https://math.semestr.ru/games/maingames.php> (Дата обращения 19.11.2025)
3. А.С. Шевченко ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ [Электронный ресурс] - Режим доступа URL: [https://edu.rubinst.ru/resources/books/Shevchenko_A.S._Prinyatie resh-eniy_v_usloviyakh_konphlikta_i_neopredelennosti_2021.pdf](https://edu.rubinst.ru/resources/books/Shevchenko_A.S._Prinyatie_reshe-niy_v_usloviyakh_konphlikta_i_neopredelennosti_2021.pdf) (Дата обращения 19.11.2025)
4. А. Г. Кремлев Основные понятия теории игр: учебное пособие [Электронный ресурс] - Режим доступа URL: https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/43897/1/978-5-7996-1940-4_2016.pdf (Дата обращения 30.11.2025)
5. О.О.Замков, Ю.А.Черемных А. В. Толстопятенко Математические_методы_в_экономике [Электронный ресурс] - Режим доступа URL: https://namdu.uz/media/Books/pdf/2024/05/31/NamDU-ARM-2830-Математические_методы_в_экономике.pdf (Дата обращения 30.11.2025)