

УДК 519.2

БИЕКЦИИ МЕЖДУ КОМБИНАТОРНЫМИ ОБЪЕКТАМИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ЧИСЛАМИ КАТАЛАНА

Коробанова З.О., студентка гр. ПСб-251, I курс

Научный руководитель: Липина Г.А., старший преподаватель

Кузбасский государственный технический
университет имени Т.Ф. Горбачева, г. Кемерово

Числа Каталана – это последовательность чисел, которая является решением для многих задач комбинаторики. В 1971 году математик Генри Гулд опубликовал библиографию, в которой насчитал 243 различных применений чисел Каталана в математике. На сегодняшний день выявлено не менее 66 комбинаторных интерпретаций, в которых встречается данная числовая последовательность. Они встречаются не только в абстрактной математике, но и в реальных задачах: в биоинформатике (при анализе структур РНК), в информатике (при анализе алгоритмов сортировки стеком, при построении синтаксических деревьев в компиляторах) и даже в лингвистике (при анализе структуры предложений).

Хотя имя последовательности связано с именем Эжена Шарля Каталана, её открытие принадлежит Леонарду Эйлеру. В 1751 году он поставил задачу: сколькими способами можно разрезать выпуклый многоугольник на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали? Эйлер вычислил значения вручную для многоугольников вплоть до 12-угольника и получил последовательность: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430... Также он нашел формулу для их вычисления и производящую функцию, но доказать у него это не получилось.

В 1838 году бельгийский математик Эжен Шарль Каталан, чьё имя впоследствии закрепилось за этой последовательностью, исследовал другую задачу, на первый взгляд не связанную с многоугольниками. Она звучала следующим образом: "Сколькими способами можно расставить скобки в произведении n сомножителей?". Для двух сомножителей (ab) способ один: (ab) . Для трех – два: $((ab)c)$ и $(a(bc))$. Для четырех – пять. Получилась последовательность 1, 2, 5..., и она совпала с числами Эйлера.

Первые несколько значений последовательности Каталана:

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, C_7 = 429,$$

$$C_8 = 1430 \text{ и т. д.}$$

Последовательность чисел Каталана определяется рекуррентно или явной формулой.

Рекуррентная формула чисел Каталана имеет вид: $C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$

Например, $C_1 = C_0 C_0 = 1$, $C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 1 + 1 = 2$, $C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 2 + 1 + 2 = 5$ и т.д.

Также существует формула, которая позволяет быстро вычислять C_n для любых n .

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! n!}$$

Например,

$$C_5 = \frac{1}{5+1} \binom{10}{5} = \frac{(2 \cdot 5)!}{(5+1)! 5!} = \frac{10!}{6! 5!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$$

Есть множество задач из разных областей, в которых ответом будут числа Каталана. Например, задача про правильные скобочные последовательности. Задача: «Сколько существует способов расставить n открывающихся и n закрывающихся круглых скобок так, чтобы последовательность была правильной (число закрывающих скобок не превышало число открывающих)»?

Пусть количество скобок будет равно 3 ($n=3$). Если решать с помощью формулы для чисел Каталана, то получается $C_3 = \frac{(2 \cdot 3)!}{(3+1)! 3!} = \frac{6!}{4! 3!} = \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 5$.

Можно перебрать все варианты:

((())) (сначала открывающиеся, потом закрывающиеся), (()()) (скобки внутри скобок), (())() (пара внутри, а одна снаружи), ()()() (предыдущий вариант, но наоборот), ()()() (3 отдельно закрывающиеся скобки).

Таким образом, мы получили 5 вариантов расположения скобок, что совпадает с результатом, полученным из формулы.

Также в информатике есть важная структура данных – бинарное дерево. Бинарное дерево – это иерархическая структура данных, в которой каждый узел имеет не более двух потомков. С помощью чисел Каталана, можно решить следующую задачу: сколько существует различных бинарных деревьев с n узлами? Возьмем для нашей задачи бинарное дерево с 3 узлами, получится $n=3$. $C_3 = \frac{(2 \cdot 3)!}{(3+1)! 3!} = \frac{6!}{4! 3!} = \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 5$.

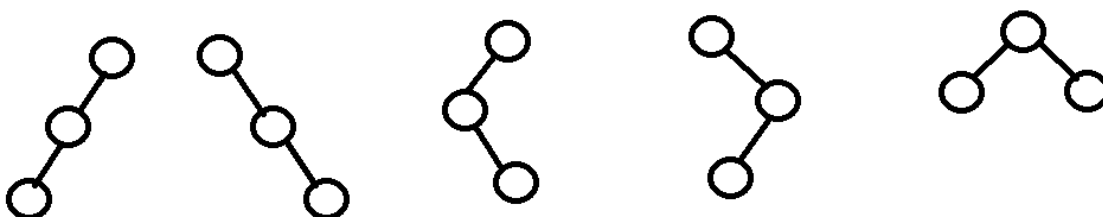


Рис.1 – пять видов бинарных деревьев с 3 узлами.

Если посмотреть на рисунок 1, то становится сразу видно, что значение формулы и графическое изображение совпадают. Этот результат показывает, что для решения данной задачи также можно применить числа Каталана.

Еще одна задача, которую можно решить через числа Каталана из области геометрии. Можно взять выпуклый многоугольник и провести в нем диагонали так, чтобы он разбился на треугольники, при этом диагонали не должны пересекаться. Например, задача: «Сколькими способами можно разбить $(n+2)$ -угольник на треугольники?». Возьмем $n=3$, то есть это будет фигура пятиугольник. Подставим n в формулу и получим: $C_3 = \frac{(2 \cdot 3)!}{(3+1)!3!} = \frac{6!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 5$. Значит, есть всего 5 способов разбить пятиугольники на треугольники.

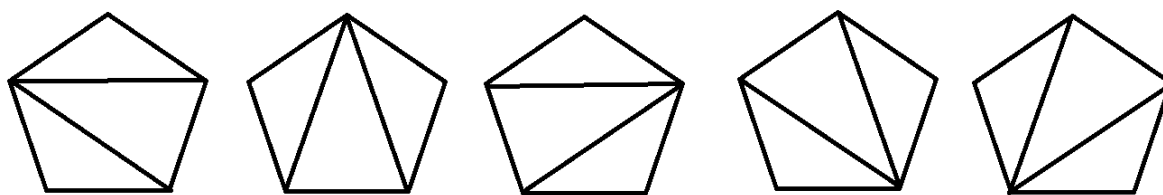


Рис.2 – 5 способов триангуляции пятиугольников.

Если решать данную задачу графически (рис. 2) можно увидеть, что таких решений всего 5. Что совпадает с ответом, полученным с помощью формулы для чисел Каталана.

Рассмотрев 3 задачи, можно заметить, что при $n=3$ всегда получается 5. Этой закономерности есть научное объяснение, между этими объектами существует взаимно-однозначное соответствие, которое называется биекцией. Таким образом, можно сказать, что каждой скобочной последовательности соответствует одно бинарное дерево и одна триангуляция.

Например, правильные скобочные последовательности, у которых $n = 3$, будут соответствовать бинарным деревьям, у которых $n = 3$. Построим дерево по скобочной последовательности. Первая пара скобок задаёт корень, то, что внутри пары будет левым поддеревом, а то, что после пары будет правым поддеревом.

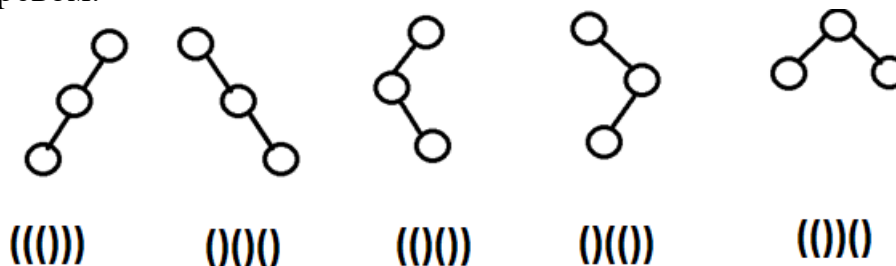


Рис.3 – Соответствие скобочных последовательностей и бинарных деревьев.

На рисунке 3 представлена связь скобочных последовательностей и бинарных деревьев. Разберем каждое соответствие отдельно.

Первое соответствие представляет собой последовательность скобок $((()))$, представим как $(A)V$, где A и V потомки от главного корня, $A=()$, V – пусто, следовательно, от главного корня потомок идет только влево. Разберём $()()$, пусть $(A1)V1$, где $A1=()$, а $V1$ – пусто. Тогда получим, что у потомка есть левый потомок-лист. А правая ветвь дерева пустая, что наглядно видно на рисунке.

По такому принципу рассмотрим второе соответствие скобочной последовательности $()()()$. $(A)V$, A -пусто, $V=()()$, получается, от главного корня есть только правый потомок. Разберем $()()$, $(A1)V1$, где $A1$ пустое, $V1=()$. Значит, от потомка есть только правый потомок-лист.

Перейдем к третьему соответствию от скобок $((()))$, запишем как $(A)V$, где $A=()()$, V – пусто, следовательно от главного корня идет только левый потомок. Рассмотрим $A=()()$, $(A1)V1$, в данном случае $A1$ будет пустым, а $V1=()$. Таким образом, получается, что от потомка идет правый потомок-лист.

Следующая скобочная последовательность $()()()$, представим её, как $(A)V$, где A – пустое, а $V=()()$, получается, от главного корня вправо идет потомок. $V=()()$, пусть $V=(A1)V1$, где $A1=()$, а $V1$ пустое. Тогда получается, что от потомка влево идет один потомок-лист.

Перейдем к последнему соответствию $((()))()$. Получается, $(A)V$, где $A=()$ и $V=()$. Следовательно, главный корень имеет двух потомков-листьев – левого и правого.

Таким образом, биекция между скобочными последовательностями и бинарными деревьями демонстрирует нам неразрывную связь между разными задачами, которые решаются с помощью чисел Каталана.

Разберем еще одну биекцию между бинарными деревьями и триангуляцией многоугольников. Данная биекция интереснее и сложнее для понимания соответствия. Для рассмотрения возьмем выпуклый пятиугольник, получается $n = 3$, значит, и для бинарных деревьев возьмем такое же n .

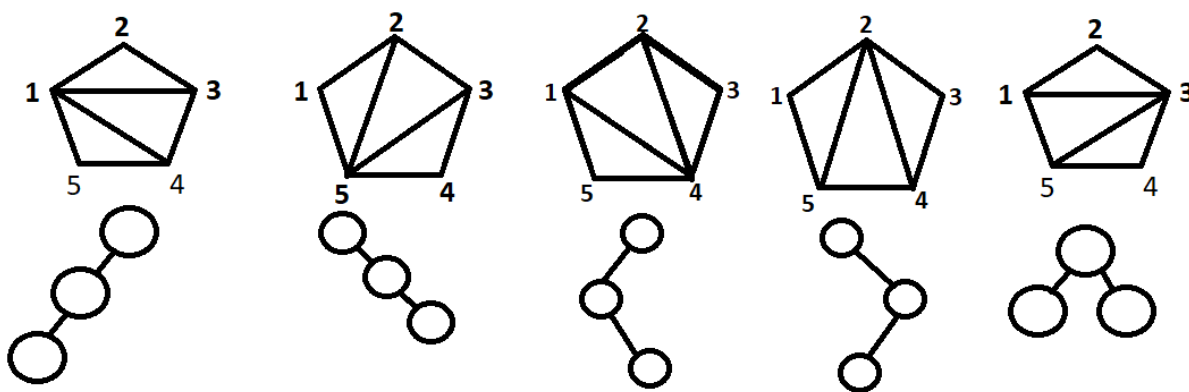


Рис. 4 – Соответствие бинарных деревьев и пятиугольников.

Вспомним, что количество узлов в бинарном дереве равно n , а триангуляция n -угольника содержит $n-2$ треугольника.

Разберем первое соответствие. Бинарное дерево имеет только левую ветвь. Значит, левое поддерево будет соответствовать многоугольнику с

$2+2=4$ вершинами, а правое – пустое, будет соответствовать отрезку, так как $0+2=2$ вершины. Пусть в пятиугольнике будет корневое ребро (1,5) (выберем его, потому что 1 – это начало наших вершин, а 5 – конец). Из пятиугольника выберем некоторый треугольник, который будет примыкать к этому ребру. Его третья вершина k может быть равна (2, 3, 4). Этот треугольник разделит многоугольник на две части. Левая часть – многоугольник с вершинами от 1 до k включительно, а правая часть – многоугольник с вершинами от k до 5 включительно. Пусть левая часть соответствует левому узлу нашего дерева, следовательно, она должна быть равна многоугольнику с 4 вершинами. Тогда правая часть будет соответствовать отрезку с двумя вершинами. Значит, левая часть многоугольника будет иметь вершины (1, 2, 3, 4), а правая будет иметь вершины (4,5), следовательно, $k = 4$, так как только 4 подходит под наши условия. Перейдем к образовавшемуся новому многоугольнику с вершинами (1, 2, 3, 4) корневое ребро в данном случае будет с вершинами (1, 4). Левое поддерево содержит один узел, значит, ему будет соответствовать многоугольник с $1+2=3$ вершинами, а правое поддерево пустое, следовательно, будет соответствовать отрезку с $0+2=2$ вершинами. Можем разбить наш четырехугольник на треугольник с вершинами (1,2,3) и на отрезок с вершинами (3,4), значит, $k_1=3$. Проводим отрезок в пятиугольнике от 1 до 3 и от 1 до 4.

Рассмотрим второе дерево. Здесь ситуация противоположная и главный корень имеет только правую ветку. Корневое ребро будет опять с вершинами (1, 5). В этом случае уже левое поддерево будет пустым и будет равняться отрезку с 2 вершинами, а правое многоугольнику с 4 вершинами. Следовательно, левая часть будет соответствовать отрезку с вершинами (1, 2), а правая часть – четырехугольнику с вершинами (2, 3, 4, 5), получается, $k=2$. Рассмотрим многоугольник с вершинами (2, 3, 4, 5). Корневым ребром будет отрезок (2, 5). От правого потомка идет только правый лист, значит левая часть будет пустая, и будет равна отрезку с двумя вершинами (2, 3), а правая часть будет равна многоугольнику с вершинами (3, 4, 5), получается, $k_1=3$. Таким образом, проводим диагонали (5, 2) и (5, 3).

Перейдем к третьему соответствию. Главный корень имеет только левого потомка, корневое ребро (1, 5). Левое поддерево будет равняться четырехугольнику с вершинами (1, 2, 3, 4), а правое, пустое, будет равняться отрезку с вершинами (4, 5). Получается, что $k = 4$. Рассмотрим многоугольник с вершинами (1, 2, 3, 4), корневым ребром будет отрезок (1, 4). От потомка поддерево идет только вправо. Значит левая часть будет пустой и будет равна отрезку с вершинами (1, 2), а правая – треугольнику с вершинами (2, 3, 4), следовательно, $k_1 = 2$. В пятиугольнике проведем отрезки (2, 4) и (1, 4).

Разберем 4 соответствие, оно также зеркально предыдущему. Главный корень имеет только правого потомка. Корневое ребро (1, 5), левая часть пустая и будет равна отрезку с вершинами (1, 2), а правая будет равна четырехугольнику с вершинами (2, 3, 4, 5), следовательно, $k = 2$. От потомка идет лист влево, значит левая часть будет равна треугольнику с вершинами

(2, 3, 4), а правая часть отрезку (4, 5), значит, $k_1 = 4$. Проведем диагонали (2, 5) и (2, 4).

Перейдем к последнему соответствию. Главный корень имеет два потомка-листа. Значит, у нас и справа, и слева есть 1 узел. Получается: справа и слева должны быть многоугольники с 3 вершинами ($n+2=1+2=3$). Значит, получим для левой части многоугольник с вершинами (1, 2, 3), а для правой части – с вершинами (3, 4, 5). Следовательно, $k = 3$, а остальные вершины будут из корневого отрезка (1, 5). Проведем в пятиугольнике диагонали (1, 3) и (5, 3).

Таким образом, на примере $n = 3$ было показано, что числа Каталана – одна из важнейших комбинаторных последовательностей. С помощью биекций из скобочных последовательностей можно построить бинарные деревья, а из бинарных деревьев – триангуляции многоугольников. Это показывает, что числа Каталана связывают между собой несколько разделов математики: комбинаторику (скобки), информатику (бинарные деревья) и геометрию (триангуляция многоугольников).