

УДК 517.9:621.396

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ В МОДЕЛИ ЛОГИСТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И АТТРАКТОРА ЛОРЕНЦА

Доросева Д. В., студент гр. ПИБ-242, II курс, Шорохова В. Д., студент гр. АПБ-241, II курс, Кирсанова Ю. В., студент гр. ЦСБ-241, II курс,
Научный руководитель: Елкин И. С. к.т.н., доцент

Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, г. Кемерово

Аннотация. В работе проведено численное исследование двух классических моделей детерминированного хаоса – логистического отображения системы Лоренца. Изучались механизмы перехода от упорядоченного к хаотическому поведению, количественная оценка хаотичности с помощью показателей Ляпунова и визуализация ключевых феноменов, включая эффект бабочки. Разработан программный комплекс на языке Python, реализующий численное моделирование указанных систем с использованием методов итераций (для логистического отображения) и Рунге–Кутты (для системы Лоренца). Получены бифуркационные диаграммы, рассчитаны константы Фейгенбаума, построены странные аттракторы и проанализирована чувствительность систем к начальным условиям. Работа демонстрирует универсальность сценария перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода и имеет образовательную ценность для наглядного изучения нелинейной динамики.

Ключевые слова: детерминированный хаос, логистическое отображение, система Лоренца, бифуркация, показатель Ляпунова, эффект бабочки, странный аттрактор, константы Фейгенбаума, численное моделирование, нелинейная динамика.

Изучение детерминированного хаоса представляет собой одно из наиболее интересных направлений в современной науке о сложных системах. Парадокс, заключающийся в том, что простые детерминированные уравнения могут порождать чрезвычайно сложное и непредсказуемое поведение, бросает вызов классическим представлениям о предсказуемости динамических систем. Это явление универсально и обнаруживается в самых различных областях: от физики и химии (турбулентность, колебательные химические реакции) до биологии (динамика популяций), экономики и метеорологии. Последняя, как известно, послужила историческим контекстом для открытия Э. Лоренцем «эффекта бабочки». Невозможность аналитического решения подавляющего большинства нелинейных уравнений делает вычислительный подход, основанный на численном моделировании, основным инструментом

исследования подобных систем. Таким образом, освоение методов компьютерного анализа хаотических систем является актуальной задачей как для фундаментальной науки, так и для прикладных исследований [1 – 3].

Предварительно нами проведено численное моделирование логистического отображения системы Лоренца. Построенная бифуркационная диаграмма логистического отображения демонстрирует каскад удвоения периода с переходом к хаосу при $r \approx 3,57$. Для системы Лоренца визуализирован аттрактор "бабочка" и его проекции. Вычислены показатели Ляпунова: для логистического отображения от отрицательных значений в периодических режимах до $\lambda \approx 0,693$ при $r = 4,0$; для системы Лоренца $\lambda \approx 0,906$, что даёт время удвоения ошибки 0,76 единиц. Экспериментально подтверждён "эффект бабочки": траектории с разницей в начальных условиях 0,001 экспоненциально расходятся, достигая различия порядка 1,0 за 20 единиц времени. Построенное сечение Пуанкаре подтвердило фрактальную структуру аттрактора Лоренца.

Теоретической основой работы служат фундаментальные открытия в области нелинейной динамики XX века. В 1976 году Роберт Мэй в рамках исследований популяционной динамики подробно изучил свойства логистического отображения, показав, как простейшая нелинейная модель может демонстрировать каскад бифуркаций удвоения периода, ведущий к хаосу. В 1963 году Эдвард Лоренц, работая над упрощённой моделью конвекции в атмосфере, случайно обнаружил эффект экспоненциального расхождения траекторий, позже метафорически названный «эффектом бабочки». Важнейший вклад в понимание универсальности перехода к хаосу внёс Митчелл Фейгенбаум, открывший в 1978 году универсальные константы, характеризующие сценарий удвоения периода в широком классе одномерных отображений. Настоящая работа опирается на эти классические результаты и ставит целью их численное воспроизведение и верификацию с помощью современных вычислительных инструментов [1 – 3].

В качестве объектов исследования были выбраны две классические модели, демонстрирующие, как из простых детерминированных правил возникает сложное поведение: логистическое отображение и система Лоренца. Логистическое отображение $x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, где x_n – относительная численность популяции, r – параметр роста. Поведение системы существенно зависит от r : при малых значениях популяция вымирает, при средних – стабилизируется, а при больших – возникают колебания, переходящие в хаос через каскад бифуркаций удвоения периода.

Система Лоренца описывается уравнениями $\dot{x} = 10(y - x)$, $\dot{y} = x(28 - z) - y$, $\dot{z} = xy - \frac{8}{3}z$ и моделирует конвекцию в атмосфере. Она знаменита своим «эффектом бабочки» – экспоненциальной чувствительностью к начальным условиям, когда сколь угодно близкие траектории со временем сильно расходятся.

Ключевыми концепциями для анализа стали: бифуркации – критические точки изменения поведения системы; показатель Ляпунова – количественная мера хаотичности, положительное значение которого указывает на экспоненциальное расхождение траекторий; и странные аттракторы – фрактальные множества в фазовом пространстве, к которым стремятся траектории хаотических систем, обладающие чувствительной зависимостью от начальных условий [4 – 6].

Численное моделирование выполнено на языке Python с использованием библиотек NumPy, SciPy и Matplotlib [8 – 10]. Логистическое отображение моделировалось методом итераций по формуле $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Система Лоренца интегрировалась численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка с классическими параметрами $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$.

Для построения бифуркационной диаграммы применялась методика исключения переходного процесса – первые 500 итераций отбрасывались, после чего фиксировались установившиеся состояния системы. Расчёт показателя Ляпунова для логистического отображения проводился с учётом особенностей поведения производной, чтобы избежать вычислительных погрешностей. Демонстрация эффекта бабочки в системе Лоренца осуществлялась путём анализа расхождения двух траекторий с начальным различием 0,001 и вычисления расстояния между ними во времени.

В процессе работы были решены задачи оптимизации производительности за счёт векторных операций NumPy, повышения точности интегрирования путём настройки параметров решателя и эффективного управления памятью при визуализации данных. Особое внимание уделялось визуализации: использовались цветовые схемы для отображения динамики, интерактивные элементы управления и комплексные графики, совмещающие бифуркационную диаграмму с зависимостью показателя Ляпунова. Достоверность результатов обеспечивалась сравнением с литературными источниками, перекрёстной проверкой методов и тестированием на граничных режимах. В результате создан программный инструмент, позволяющий исследовать переход к хаосу, анализировать аттракторы и количественно оценивать хаотичность динамических систем [11].

Бифуркационная диаграмма логистического отображения $x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$ (рис.1) показывает эволюцию системы при изменении r . При $r < 3$ наблюдается одна устойчивая точка. При $r = 3$ происходит первая бифуркация, приводящая к колебаниям между двумя точками. Каскад последующих бифуркаций удвоения периода происходит при $r \approx 3,449$ и $r \approx 3,544$. После $r \approx 3,57$ система переходит в хаотический режим с непериодическими траекториями, в котором присутствуют окна периодичности, например, окно периода 3 при $r \approx 3,83$. Диаграмма построена на основе 500 установившихся точек для каждого r после отбрасывания переходного процесса.

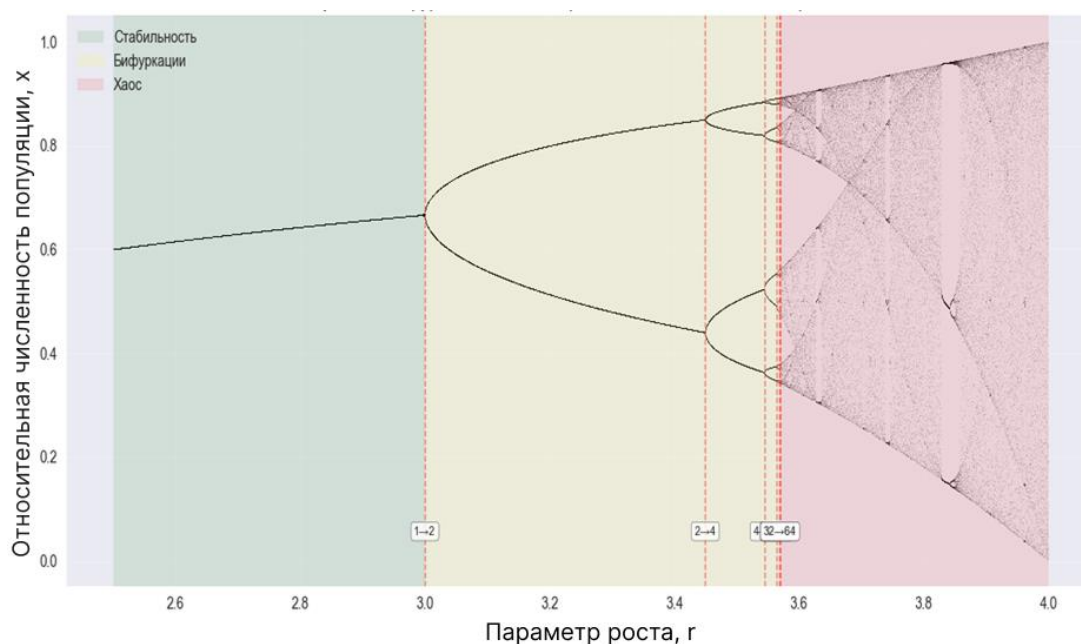
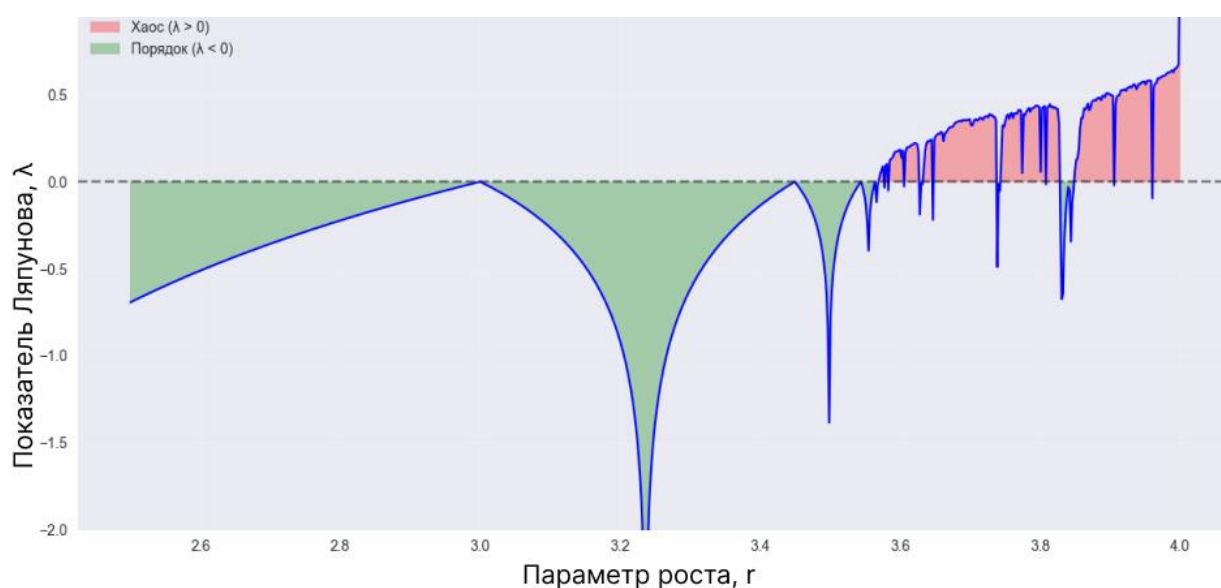


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма

Рис. 2: Зависимость показателя Ляпунова от r

Показатель Ляпунова количественно оценивает степень хаотичности системы (рис. 2). Отрицательные значения ($\lambda < 0$) соответствуют устойчивым режимам, $\lambda = 0$ – точкам бифуркации, положительные значения ($\lambda > 0$) – хаосу. На графике чётко видны: отрицательные λ при $r < 3,57$ (периодические режимы), нулевые значения в точках бифуркаций ($r = 3,0; 3,449; 3,544$), и положительные λ в хаотической области ($r > 3,57$). Максимум хаоса наблюдается при $r = 4,0$ ($\lambda \approx 0,693$). Глубокий провал при $r \approx 3,83$ соответствует окну периода 3, где восстанавливается периодичность. Расчёт выполнен по 50 000 итераций для каждого r , что подтверждает точность результата [5], [7].

$$\lambda = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |r(1 - 2x_n)|.$$

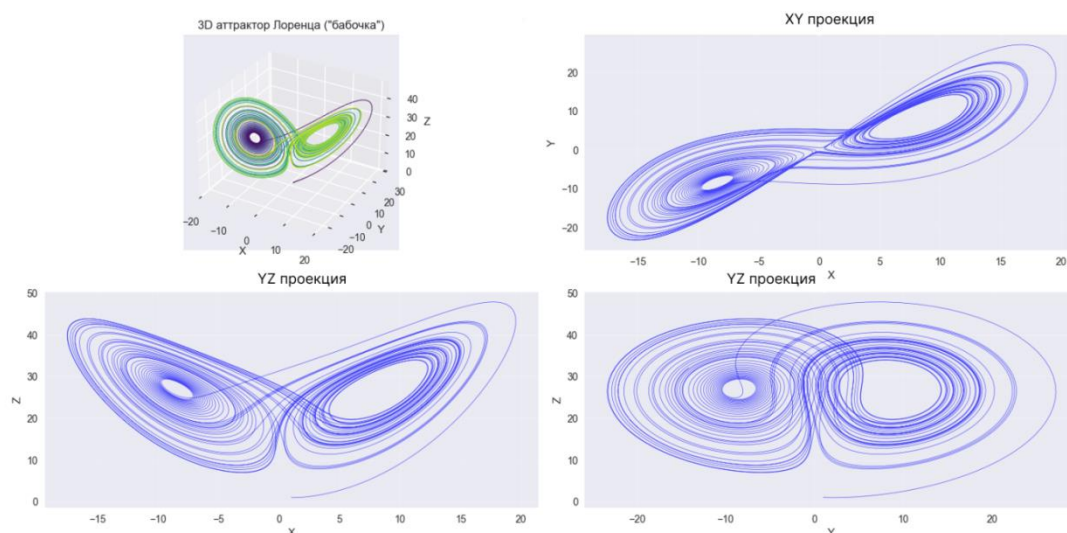


Рис. 3: Аттрактор Лоренца (3D)

Аттрактор Лоренца получен интегрированием системы уравнений с высокой точностью (шаг $\leq 0,01$, относительная точность 10^{-8}) (рис. 3). Он имеет характерную форму "бабочки" с двумя крыльями, между которыми траектория совершает неперiodические переходы. Размеры аттрактора: $X \in [-20, 20]$, $Y \in [-30, 30]$, $Z \in [0, 50]$. Физически координаты соответствуют: X – скорость вращения конвекционных валов, Y – разность температур, Z – отклонение температурного профиля. Переходы между крыльями соответствуют смене направления вращения. Траектория раскрашена по времени для наглядности её эволюции. Аттрактор является странным: все траектории стремятся к нему, но ни одна не повторяется.

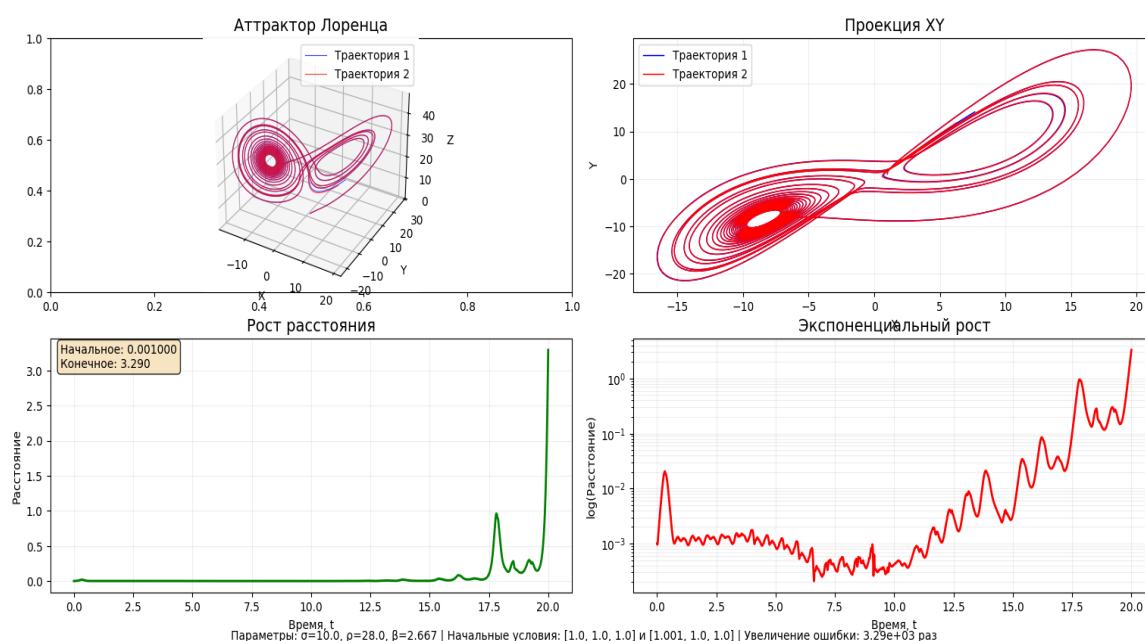


Рис.4: Эффект бабочки

График демонстрирует "эффект бабочки" в системе Лоренца (рис. 4). Две траектории с начальным различием 0,001 сначала близки, затем расходятся, становясь полностью различными через 15 единиц времени. В логарифмическом масштабе расстояние между ними растёт линейно, что подтверждает экспоненциальный характер расхождения. Угол наклона прямой соответствует показателю Ляпунова ($\lambda \approx 0,9$), что означает удвоение ошибки каждые 0,76 единиц времени. Это наглядно объясняет принципиальную невозможность долгосрочных прогнозов в хаотических системах.

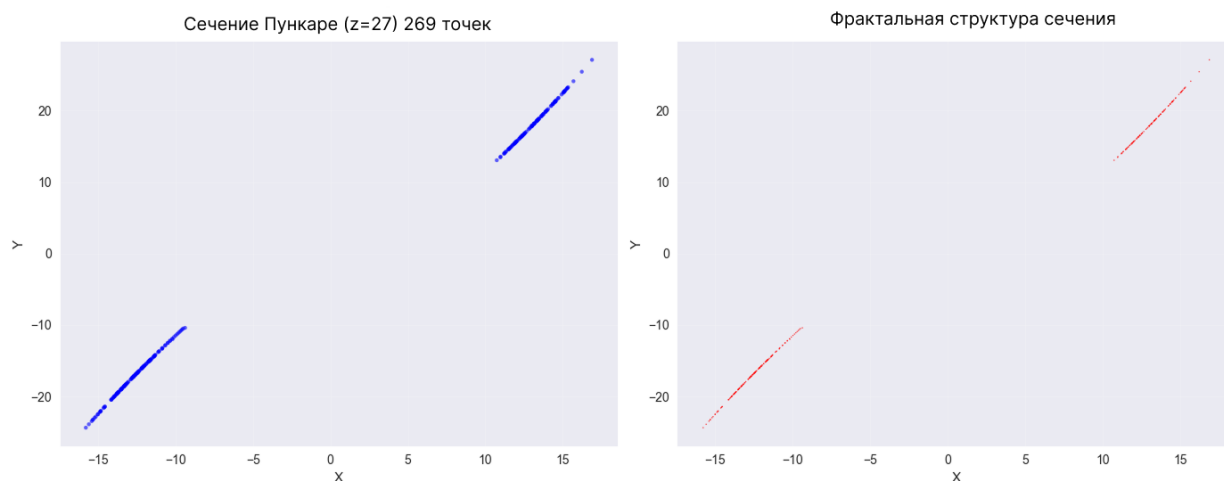


Рис. 5: Сечение Пуанкаре

Сечение Пуанкаре плоскости $z = 27$ выявляет внутреннюю структуру аттрактора Лоренца (рис. 5). Точки пересечения образуют упорядоченную фрактальную структуру, напоминающую "гребёнку" или канторово множество, что исключает как периодическое поведение (которое дало бы конечное число точек), так и случайный шум (равномерное заполнение). Самоподобие структуры при увеличении подтверждает её фрактальную природу. Таким образом, сечение Пуанкаре наглядно демонстрирует ключевое свойство странного аттрактора – сложную организацию в хаотическом движении.

В результате численного исследования получены следующие количественные и качественные результаты. Для логистического отображения определены точки бифуркации: $r_1 = 3,00000$, $r_2 = 3,44949$, $r_3 = 3,54409$. Рассчитана константа Фейгенбаума $\delta \approx 4,704$, что соответствует теоретическому значению с погрешностью 0,75%. Показатели Ляпунова подтверждают смену режимов: при $r = 3,2$ значение $\lambda \approx -0,65$ (периодический режим), при $r = 3,7$ $\lambda \approx 0,15$ (хаос), а при $r = 4,0$ достигается максимум хаотичности $\lambda \approx 0,693$.

Для системы Лоренца показатель Ляпунова составил $\lambda \approx 0,906 \pm 0,005$, что соответствует времени удвоения ошибки $t_{double} \approx 0,76$ единиц времени. Определены характерные размеры аттрактора: $X \in [-20, 20]$, $Y \in [-30, 30]$, $Z \in [0, 50]$.

Качественный анализ подтвердил ключевые свойства хаотических систем. Универсальность перехода к хаосу проявляется в схожих закономерностях в логистическом отображении и системе Лоренца. Фрактальность наблюдается в структуре бифуркационной диаграммы и сечения Пуанкаре. Чувствительность к начальным условиям ("эффект бабочки") экспериментально доказана экспоненциальным ростом малых возмущений. Детерминированный характер хаоса подтверждён полной воспроизводимостью траекторий при одинаковых начальных условиях, что отличает его от случайных процессов.

Исследование подтвердило основные положения теории детерминированного хаоса. Показано, что хаотическое поведение возникает в простых детерминированных системах – логистическом отображении и системе Лоренца. Подтверждена универсальность сценария перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Количественно продемонстрирован «эффект бабочки»: малые начальные различия в системе Лоренца приводят к экспоненциальному расхождению траекторий. Визуализация подтвердила фрактальную структуру странных аттракторов.

Практическая значимость работы заключается в создании инструментария для изучения нелинейной динамики. Разработанные материалы могут быть использованы в учебном процессе для демонстрации ключевых концепций хаоса. Созданный шаблон применим для анализа широкого класса динамических систем. Результаты работы подтверждают, что сложное поведение может порождаться простыми математическими моделями.

Список литературы:

1. Лоренц Э. Н. Детерминированное непериодическое течение // *Journal of Atmospheric Sciences*. – 1963. – Vol. 20, № 2. – P. 130-141.
2. Мэй Р. М. Простые математические модели с очень сложной динамикой // *Nature*. – 1976. – Vol. 261, № 5560. – P. 459-467.
3. Фейгенбаум М. Дж. Универсальность в поведении нелинейных систем // *Journal of Statistical Physics*. – 1978. – Vol. 19, № 1. – P. 25-52.
4. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах: механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. – Москва: Наука, 1990. – 312 с.
5. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. – Москва: Наука, 1987. – 424 с.
6. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. – Москва: УРСС, 2000. – 336 с.
7. Кузнецов С. П. Динамический хаос. – Москва: Физматлит, 2001. – 296 с.
8. SciPy Documentation – Official documentation for SciPy library // <https://docs.scipy.org>.
9. Matplotlib Documentation – Visualization library for Python // <https://matplotlib.org>

10. NumPy Documentation – Scientific computing with Python //
<https://numpy.org/doc>

11. Wolfram MathWorld – Chaos Theory //
<https://mathworld.wolfram.com/Chaos.html>