

УДК 519.2

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ НАДЁЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

С.Е. Гайдайчук, студент гр. ИБс-231, III курс  
Е.А. Николаева, к. ф.-м. н., доцент, зав. кафедрой математики  
Кузбасский государственный технический университет  
имени Т.Ф. Горбачева, г. Кемерово

Вопросы надёжности технического оборудования промышленного и технологического назначения, и прогнозирования случайных эксплуатационных отказов, возникающих в процессе работы оборудования вследствие износа, перегрузок или скрытых дефектов давно перестали быть чисто инженерной проблемой, поскольку современные технические системы характеризуются высокой сложностью и неопределённостью условий эксплуатации, что требует применения математических методов анализа случайных процессов и статистической обработки экспериментальных данных. По мере усложнения промышленных систем всё большую роль в их анализе играет математический аппарат, позволяющий формализовать неопределённость и делать обоснованные выводы на основании ограниченных наблюдений. Теория вероятностей и математическая статистика предоставляют инструментарий, без которого затруднительно ни проектирование, ни эксплуатация современных машин. В настоящей работе предпринята попытка показать, каким образом классические вероятностно-статистические методы применяются при оценке надёжности, и проиллюстрировать это на расчётном примере.

Зарождение теории вероятностей обычно связывают с перепиской Б. Паскаля и П. Ферма 1654 года по поводу задач об азартных играх [1]. Однако переход от комбинаторных задач к настоящей математической дисциплине произошёл значительно позже — благодаря трудам Я. Бернулли, П.-С. Лапласа и в особенности А.Н. Колмогорова, который в 1933 году предложил аксиоматическое построение теории вероятностей на основе теории меры [2]. Именно аксиоматика Колмогорова превратила вероятность из интуитивного понятия в строгий математический объект, что открыло путь для создания современной математической статистики.

Математическая статистика как самостоятельное направление оформилась в начале XX века в работах К. Пирсона, Р. Фишера, Е. Neyмана и Э. Пирсона [3]. Задачи статистики сводятся к тому, чтобы по конечной выборке наблюдений делать выводы о свойствах генеральной совокупности: оценивать параметры распределений, проверять гипотезы, строить доверительные интервалы. Эти задачи возникают повсюду, где имеется дело со случайными

величинами, — от медицинских исследований до контроля качества продукции.

В инженерной практике одной из главных областей приложения вероятностно-статистических методов стала теория надёжности. Под надёжностью понимают свойство объекта сохранять во времени способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях эксплуатации [4]. Количественные показатели надёжности — вероятность безотказной работы, интенсивность отказов, среднее время наработки до отказа — по своей природе являются вероятностными характеристиками, и их оценка невозможна без привлечения соответствующего математического аппарата.

Основные понятия и виды распределений используемые в анализе надёжности:

### *1. Вероятность безотказной работы и интенсивность отказов*

Пусть случайная величина  $T$  обозначает время работы элемента до первого отказа. Функция надёжности (вероятность безотказной работы) определяется как:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t),$$

где  $F(t)$  — функция распределения случайной величины  $T$  [5]. Интенсивность отказов определяется соотношением:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

где  $f(t) = F'(t)$  — плотность распределения. Интенсивность отказов имеет наглядный смысл: это условная плотность вероятности отказа в момент  $t$  при условии, что до этого момента отказа не было.

### *2. Экспоненциальное распределение*

Простейшей и наиболее широко используемой моделью является экспоненциальное распределение с постоянной интенсивностью отказов, используется для описания случайных внезапных отказов в режиме нормальной эксплуатации  $\lambda = \text{const}$ :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

Функция надёжности в этом случае принимает вид  $R(t) = e^{-\lambda t}$ , а среднее время наработки до отказа равно  $T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda}$ . Экспоненциальная модель хорошо описывает период нормальной эксплуатации, когда приработочные и износные отказы отсутствуют. Именно к экспоненциальному закону сводится значительная часть практических расчётов надёжности электронного оборудования [6].

### *3. Распределение Вейбулла*

Когда интенсивность отказов не является постоянной (что характерно для механических деталей, подверженных усталости и износу), используют распределение Вейбулла с плотностью, в режимах эксплуатации, где интенсивность отказов изменяется со временем — в периоде приработки оборудования или на стадии износа и старения элементов.

$$f(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}},$$

где  $\beta$  — параметр формы,  $\eta$  — параметр масштаба [5]. При  $\beta = 1$  распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное. При  $\beta > 1$  интенсивность отказов возрастает, что соответствует износу; при  $\beta < 1$  — убывает, что характерно для приработочного периода.

#### *4. Нормальное распределение и центральная предельная теорема*

Нормальное (гауссово) распределение занимает центральное место в математической статистике. Его особая роль объясняется центральной предельной теоремой: при суммировании большого числа независимых случайных величин с конечными дисперсиями распределение суммы приближается к нормальному вне зависимости от распределений слагаемых [1]. Благодаря этому нормальное распределение используется при построении доверительных интервалов и проверке статистических гипотез, а также непосредственно в теории надёжности — для описания ресурса изделий, подверженных постепенным отказам, в условиях постепенного изнашивания изделий, ресурс которых формируется под воздействием большого числа независимых факторов; например, для механических деталей машин, подшипников, валов, элементов конструкций и других изделий с ограниченным ресурсом.

Статистическое оценивание параметров надёжности:

##### *1. Точечные оценки*

Предположим, что проведено испытание  $n$  однотипных элементов, зафиксированы времена до отказа  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Если принята модель экспоненциального распределения, оценка параметра  $\lambda$  методом максимального правдоподобия имеет вид:

$$\lambda = \frac{n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}$$

Оценка среднего времени наработки до отказа, соответственно, равна:

$$T_{\text{ср}} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}.$$

Эта оценка является несмещённой и состоятельной, что гарантирует её хорошие свойства при достаточном объёме выборки как правило не менее 20–30 наблюдений, что обеспечивает статистическую устойчивость оценки параметров распределения. [3].

##### *2. Доверительные интервалы*

Точечная оценка параметра сама по себе мало информативна без указания её точности, потому что она не показывает степень возможной ошибки оценки и не позволяет судить о точности полученного результата без указания интервала, в котором может находиться истинное значение параметра. Доверительный интервал позволяет указать границы, в которых истинное значение параметра находится с заданной вероятностью (доверительной вероятностью)  $\gamma$ . Для оценки средней наработки при экспоненциальном распределении доверительный интервал строится с использованием распределения хи-квадрат [7]:

$$\left[ \frac{2n\hat{T}_{\text{ср}}}{\chi^2_{1-\frac{1-\gamma}{2}, 2n}}; \frac{2n\hat{T}_{\text{ср}}}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, 2n}} \right],$$

где  $\chi^2_{\alpha}, k$  — квантиль распределения хи-квадрат с  $k$  степенями свободы уровня  $\alpha$ .

### 3. Проверка гипотез о виде распределения

Выбор модели распределения (экспоненциальное, Вейбулла, нормальное и т.д.) — ответственный этап анализа. Для проверки согласия эмпирического распределения с теоретическим применяют критерии согласия: критерий Пирсона, критерий Колмогорова и другие [3]. Суть состоит в вычислении некоторой статистики, характеризующей отклонение наблюдаемых частот от теоретических, и сравнении её с критическим значением при выбранном уровне значимости.

Рассмотрим задачу, которая позволяет проиллюстрировать изложенные методы. Пусть на предприятии эксплуатируется партия из 10 однотипных насосных агрегатов. В ходе наблюдений зафиксированы следующие значения наработки до первого отказа (в тысячах часов): 4,2; 5,8; 3,1; 7,4; 6,0; 2,9; 8,3; 5,5; 4,7; 6,1.

Среднее значение наработки составляет:

$$\hat{T}_{\text{cp}} = \frac{4,2 + 5,8 + 3,1 + 7,4 + 6,0 + 2,9 + 8,3 + 5,5 + 4,7 + 6,1}{10} = 5,4 \text{ тыс. ч.}$$

Выборочная дисперсия равна:

$$S^2 = \frac{\sum (t_i - \hat{T}_{\text{cp}})^2}{n - 1}$$

Проведём вычисления отклонений:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\sum (t_i - \hat{T}_{\text{cp}})^2}{n - 1} = \\ &= \frac{(4,2 - 5,4)^2 + (5,8 - 5,4)^2 + (3,1 - 5,4)^2 + (7,4 - 5,4)^2 + (6,0 - 5,4)^2}{10 - 1} + \\ &+ \frac{(2,9 - 5,4)^2 + (8,3 - 5,4)^2 + (5,5 - 5,4)^2 + (4,7 - 5,4)^2 + (6,1 - 5,4)^2}{10 - 1} = \\ &= \frac{26,9}{9} \approx 1,73 \end{aligned}$$

Чаще всего в подобных задачах распределение является экспоненциальным, тогда оценка интенсивности отказов:

$$\lambda = 1/\hat{T}_{\text{cp}} = 1 / 5,4 \approx 0,185 \text{ (тыс. ч)}^{-1}.$$

Вероятность безотказной работы в течение, например, 3 тыс. часов при экспоненциальной модели:

$$R(3) = e^{-0,185 \cdot 3} = e^{-0,556} \approx 0,573.$$

Таким образом, при данной модели около 57% агрегатов проработают без отказа свыше 3 тыс. часов.

Для построения 95%-го доверительного интервала средней наработки обратимся к распределению хи-квадрат с  $2n = 20$  степенями свободы. Квантили  $\chi^2_{0,025;20} \approx 9,591$  и  $\chi^2_{0,975;20} \approx 34,170$  [7]. Тогда доверительный интервал:

$$\text{нижняя граница: } \frac{2 \cdot 10 \cdot 5,4}{34,170} \approx 3,16 \text{ тыс. ч;}$$

верхняя граница:  $\frac{2 \cdot 10 \cdot 5,4}{9,591} \approx 11,26$  тыс. ч.

Получаем интервал (3,16; 11,26) тыс. часов, что типично для малых выборок — интервал достаточно широк, и для его сужения потребовались бы дополнительные наблюдения.

Следует отметить, что коэффициент вариации выборки

$$V = S/\hat{T}_{\text{ср}} \approx \frac{1,73}{5,4} \approx 0,32$$

заметно отличается от единицы, тогда как для экспоненциального распределения теоретический коэффициент вариации равен 1. Это указывает на то, что экспоненциальная модель может быть не лучшим описанием данной выборки, и стоит рассмотреть распределение Вейбулла или нормальное. Подобная ситуация наглядно демонстрирует важность этапа проверки гипотез при статистическом анализе.

Описанные выше подходы находят широкое применение не только в теории надёжности. В промышленности статистические методы контроля качества (контрольные карты Шухарта, приёмочный статистический контроль) основаны на тех же принципах — оценивание параметров по выборке и принятие решений в условиях неопределённости [8]. В финансах и страховании вероятностные модели используются для оценки рисков. В медицинской статистике методы проверки гипотез применяются при анализе эффективности лечения. Словом, теория вероятностей и математическая статистика составляют универсальный язык количественного описания неопределённости, и владение этим языком необходимо специалисту практически любого профиля.

В контексте инженерного образования важно подчеркнуть, что формальное знание формул и теорем недостаточно. Ключевой навык состоит в умении правильно выбрать модель, корректно интерпретировать результаты расчётов и понимать границы применимости метода. Как показал приведённый выше пример, даже простая оценка средней наработки по малой выборке порождает вопросы о выборе распределения, ширине доверительного интервала и достаточности объёма данных. Именно здесь математическая подготовка переходит в область инженерного мышления.

В настоящей работе рассмотрены основные понятия теории вероятностей и математической статистики в приложении к задачам оценки надёжности автоматизированных и механических технических систем. Показано, что вероятностные модели (экспоненциальное распределение, распределение Вейбулла) позволяют количественно описать характер отказов оборудования, а статистические методы (точечное и интервальное оценивание, проверка гипотез) обеспечивают обоснованность выводов при работе с экспериментальными данными. Приведённый расчётный пример иллюстрирует практическое применение этих методов и одновременно указывает на необходимость критического анализа результатов и тщательного выбора модели.

**Список литературы:**

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей : учебник для вузов / Е. С. Вентцель. — 12-е изд., стер. — Москва : КНОРУС, 2010. — 658 с.
2. Колмогоров, А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. — Москва : Наука, 1974. — 120 с.
3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. — 13-е изд., стер. — Москва : Высшее образование, 2013. — 479 с.
4. ГОСТ 27.002-2015. Надежность в технике. Термины и определения. — Москва : Стандартинформ, 2016. — 28 с.
5. Острейковский, В. А. Теория надёжности : учебник для вузов / В. А. Острейковский. — Москва : Высшая школа, 2003. — 463 с.
6. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надёжности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьёв. — Москва : Наука, 1965. — 524 с.
7. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика : для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. — Москва : Физматлит, 2006. — 816 с.
8. Клячкин, В. Н. Статистические методы в управлении качеством: компьютерные технологии : учебное пособие / В. Н. Клячкин. — 2-е изд., стер. — Москва : Финансы и статистика, 2009. — 304 с.