

УДК 519

ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ЗАДАЧИ ТАНЕЖИ: ОТ КОМБИНАТОРНОЙ ГОЛОВОЛОМКИ К АНАЛИЗУ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

Ведищева М.С., студент гр. ИАб-241, II курс

Научный руководитель: Дягилева А.В. к.т.н., доцент

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева,
г. Кемерово

Аннотация. В статье представлен обзор результатов цикла исследований, посвященных задаче Танежи. Рассмотрены ключевые этапы работы: от поиска арифметических представлений для числа 10958 до теоретико-сложностного анализа и экспериментального построения «карты сложности». Обобщены выводы о структуре пространства поиска, природе вычислительной сложности задачи и статистической значимости аномалии, связанной с числом 10958. Показано, что задача Танежи является не просто занимательной головоломкой, но и содержательной моделью для изучения NP-трудных проблем.

Ключевые слова: задача Танежи, число 10958, NP-трудность, вычислительная сложность, пространство поиска, статистический анализ.

Задача, предложенная бразильским математиком Индером Танежей, заключается в представлении всех натуральных чисел от 1 до 11111 с помощью строго упорядоченной последовательности цифр от 1 до 9 (как в возрастающем, так и в убывающем порядке) и набора арифметических операций: сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень. Несмотря на кажущуюся простоту, эта задача оказалась нетривиальной. Для подавляющего большинства чисел представления были найдены, однако число 10958 в возрастающем порядке цифр до сих пор не имеет известного решения [1].

Настоящая работа представляет собой обобщение результатов цикла исследований, выполненных в период с 2023 по 2026 год. Цель обзора — систематизировать полученные данные, объединив результаты поиска решений, теоретико-сложностного анализа, экспериментального моделирования и статистической обработки в единую картину, раскрывающую природу вычислительной сложности задачи Танежи.

Первоначальный этап исследования был посвящен анализу сути проблемы и поиску возможных решений для числа 10958 [2]. В рамках работы были рассмотрены два основных подхода, вокруг которых развернулась дискуссия в научном сообществе: использование конкатенации и применение округления.

Метод конкатенации часто критикуется как не являющийся строго арифметической операцией. Однако в работе [2] показано, что операцию конкатенации можно интерпретировать в рамках позиционных систем счисления, что

придает ей алгебраическую строгость. Было продемонстрировано, что представление числа 10958 с использованием конкатенации $(1 \times 23 + (((4 \times 5 \times 6) \parallel 7) + 8) \times 9)$ является корректным, и его можно пересчитывать в разных системах счисления, получая эквивалентные результаты. Это позволило сделать вывод, что метод конкатенации является допустимым и входит в общее множество операций, используемых в задаче.

Параллельно был проведен вычислительный эксперимент по поиску наиболее точных приближений числа 10958 без использования конкатенации. С помощью программного кода на Python были получены выражения, дающие значения, близкие к целевому, но ни одно из них не дало точного результата. На основе этого был сделан вывод, что отсутствие точного решения связано не с принципиальной невозможностью его существования, а с высокой сложностью его структуры.

Следующий этап исследования был посвящен формальному анализу вычислительной сложности задачи Танежи [3]. Ключевым результатом этого этапа стало четкое разделение проблемы верификации и проблемы синтеза. Было доказано, что проблема верификации (проверка того, что предъявленное выражение дает заданное число) принадлежит классу NP, так как требует полиномиального времени.

В работе [3] впервые приведено обоснование NP-трудности проблемы синтеза выражения. Путем полиномиального сведения от задачи разбиения числового множества было показано, что даже редуцированная версия задачи Танежи является NP-трудной. Это объясняет, почему не существует универсального эффективного алгоритма для ее решения, и обосновывает необходимость применения эвристических методов.

Для изучения структуры пространства поиска была разработана математическая модель, учитывающая экспоненциальный рост числа возможных выражений. Было показано, что пространство поиска обладает сложной, неоднородной структурой, характеризуется наличием «островов» достижимых значений и кластеров решений. Эти теоретические выводы легли в основу дальнейших экспериментальных исследований.

Для верификации теоретических выводов был проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого для диапазона чисел от 0 до 100 фиксировалось время поиска их точного представления [4]. Основной целью было построение «карты сложности» — графика, отражающего зависимость вычислительных затрат от значения целевого числа N.

Результаты эксперимента подтвердили неоднородность пространства поиска. Время поиска не является монотонной функцией: некоторые небольшие числа (например, 11) требуют больше времени, чем соседние. Были выявлены числа-аномалии (11, 23, 37, 58, 67, 79), для которых время поиска превышало среднее значение более чем на 10%. Интересно, что большинство из этих чисел являются простыми. На основе полученных данных была предложена классификация чисел по уровню вычислительной сложности: низкая (около 15% чисел), средняя (75%) и высокая (10%).

Экспериментально подтверждена асимметрия пространства поиска: время поиска представления для одного и того же числа в возрастающем и убывающем порядке цифр может существенно различаться. Это объясняет, почему для числа 10958 существует представление в убывающем порядке, но не найдено в возрастающем.

Заключительный этап исследования был посвящен статистическому анализу распределения представимых чисел на основе таблиц, полученных самим Индером Танежей [5]. Основной целью было выяснить, является ли пропуск числа 10958 статистически значимой аномалией или же случайностью.

Для проверки гипотезы о случайности представимости был проведен вероятностный анализ. Интервал от 0 до 11111 был разбит на интервалы, и в каждом из них, за исключением интервала, содержащего 10958, были представлены все числа. При гипотезе о случайной представимости с вероятностью 0,5 вероятность получить ровно один пропуск в интервале из 1000 чисел является ничтожно малой ($\sim 10^{-297}$). Это позволило с высокой степенью уверенности отвергнуть гипотезу случайности. Даже при очень высокой вероятности представимости (0,999) вероятность существования единственного пропуска в указанном интервале составляет около 37%, что является статистически правдоподобным, но не объясняет его локализацию именно в 10958.

Дополнительный анализ окрестности числа 10958 показал, что числа 10957 и 10959 имеют сложные, нетривиальные представления, что указывает на наличие локального «пика» сложности в этой области пространства поиска.

Проведенный цикл исследований позволил сформировать целостное представление о задаче Танежи. Было установлено, что она представляет собой не просто занимательную головоломку, а является NP-трудной вычислительной проблемой с богатой и сложной структурой пространства поиска [3, 4]. На основе экспериментальных данных была построена «карта сложности», демонстрирующая неравномерность распределения вычислительных затрат [4]. Статистический анализ подтвердил, что отсутствие решения для числа 10958 не является случайностью, а представляет собой структурную аномалию, связанную с его арифметическими свойствами и асимметрией пространства поиска [5].

В перспективе дальнейшие исследования могут быть направлены на расширение экспериментального диапазона, применение методов машинного обучения для предсказания сложности и разработку эффективных эвристических алгоритмов, способных найти представление для числа 10958.

Список литературы

1. Taneja, I. J. Crazy Sequential Representation: Numbers from 0 to 11111 in terms of Increasing and Decreasing Orders of 1 to 9 / I. J. Taneja. – 2014. – URL: <https://arxiv.org/abs/1302.1479> (дата обращения: 01.04.2026). – Текст : электронный.
2. Ведищева, М. С. Проблема числа 10958 / М. С. Ведищева ; научный руководитель Н. Н. Токарева. – Кемерово : МБОУ СОШ №84, 2024. – 20 с.

3. Ведищева, М. С. Анализ вычислительной сложности задачи Танежи и разработка алгоритмов поиска арифметических представлений чисел / М. С. Ведищева ; научный руководитель А. В. Дягилева. – Кемерово : Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, 2026. – 18 с.

4. Ведищева, М. С. Математическое моделирование и системный анализ пространства поиска в задаче Танежи / М. С. Ведищева ; научный руководитель А. В. Дягилева. – Кемерово : Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, 2026. – 6 с.

5. Ведищева, М. С. Статистический анализ распределения представимых чисел в задаче Танежи / М. С. Ведищева ; научный руководитель А. В. Дягилева. – Кемерово : Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, 2026. – 4 с.