

УДК 519.2

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ: ИСТОРИЯ, СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ

Важенина А.В., студентка гр. ПСб-251, I курс
Научный руководитель: Победаш П.Н., к.т.н., доцент
Кузбасский государственный технический
университет имени Т.Ф. Горбачева, г. Кемерово

В этой статье узнаем, что такое числа Фибоначчи. Посмотрим на историю их открытия, математические свойства и связь с золотым сечением. Рассмотрим примеры проявления этих чисел в живой природе и архитектуре, а также роль чисел Фибоначчи в программировании на языке Python.

Какова же история появления чисел Фибоначчи? В конце XII века в итальянском городе Пиза родился мальчик по имени Леонардо. Его отец был купцом и его звали Боначчи. В молодости Леонардо много путешествовал с отцом по Северной Африке, где познакомился с арабской математикой. Особенно его заинтересовала десятичная система счисления с использованием цифр от 0 до 9. В Европе того времени все еще использовались громоздкие римские цифры, неудобные для вычислений.

В 1202 году Леонардо, которого позже называли Фибоначчи (в переводе «сын Боначчи»), завершил свой главный труд - «Liber Abaci» (в переводе «Книга абака»). В этом сочинении он познакомил европейцев с новыми цифрами и собрал большое количество математических задач. Одна из них принесла ему славу и звучала она так: человек поместил пару кроликов в место, огороженное со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится в течение года. Получается, что первая пара рождает одну пару, а эта пара принесет еще одну пару и так далее (как показано на рис. 1).

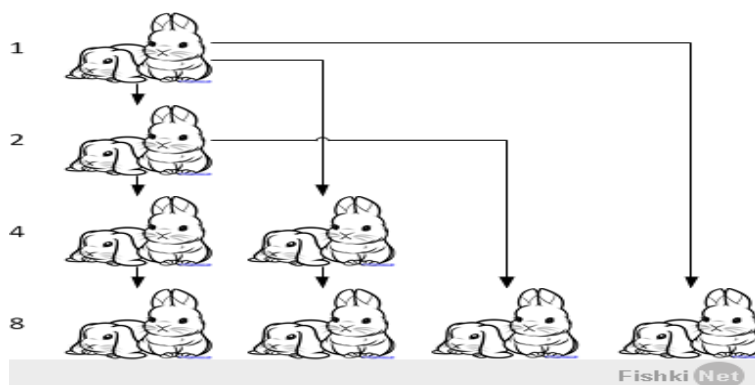


Рис. 1 - задача с кроликами

Таким образом, решение этой задачи привело к появлению числового ряда, который теперь известен как числа Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,

21, 34, 55, 89, 144 и так до бесконечности. Каждое следующее число является суммой двух предыдущих. Сейчас в ряд Фибоначчи стали добавлять в начало ноль: 0, 1, 1, 2, 3, 5... .

Числа Фибоначчи представляют собой последовательность, в которой каждый член равен сумме двух предыдущих. Это свойство записывается в виде рекуррентной формулы:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), \text{ где } F(1) = 1, F(2) = 1 \text{ (или } F(0) = 0, F(1) = 1).$$

Последовательность Фибоначчи обладает большим количеством интересных математических свойств. Посмотрим на некоторые из них.

Например, сумма первых n чисел Фибоначчи равна $F(n+2) - 1$. То есть, если мы возьмем первые пять чисел $1+1+2+3+5 = 12$, а седьмое число $F(7)$ – это 13, то $13 - 1$ получаем 12.

Каждое третье число в ряду является четным. Посмотрим: 1, 1, 2 – четное, 3, 5, 8 – четное, 13, 21, 34 – четное.

Каждое пятое число делится на 5: 1, 1, 2, 3, 5 делится на 5,..., 55 (десятое число в последовательности) делится на 5, ..., 610 (пятнадцатое число в последовательности) делится на 5 и так далее.

Если взять любое число из ряда, возвести его в квадрат и сравнить с произведением соседних с ним чисел, то разница всегда будет равна 1. То есть, возьмем число 5. Соседние числа – это 3 и 8. 5 в квадрате – это 25, а $3 \times 8 = 24$. Следовательно, $25 - 24 = 1$. Аналогично сделаем для числа 8. Соседние – 5 и 13, $5 \times 13 = 65$, а 8 в квадрате – это 64. $65 - 64 = 1$.

Самое удивительное свойство раскрывается при делении соседних чисел. Если взять пары $F(n+1)/F(n)$, то полученный результат будет приближаться к одному и тому же числу: $5/3 \approx 1,666$; $8/5 = 1,6$; $13/8 = 1,625$; $21/13 \approx 1,615$; $34/21 \approx 1,619$; $55/34 \approx 1,618$.

Результат этого отношения равен числу ϕ (фи), которое составляет приблизительно 1,6180339887.... Это число называют золотым сечением. Оно интересно тем, что если возвести число ϕ в квадрат, то оно будет равно тому же числу, но с увеличением на единицу: $\phi^2 = \phi + 1$. Золотое сечение считается идеальной пропорцией.

Числа Фибоначчи и золотое сечение встречаются в строении живых организмов. В ботанике есть понятие филлотаксиса – это то, как листья располагаются на стебле. Растения пытаются расположить листья так, чтобы каждый получал максимальное количество солнечного света. Самым лучшим оказывается расположение, связанное с числами Фибоначчи. Например, у ириса 3 лепестка, у лютика 5, а у ромашки можно насчитать 34, 55 или даже 89 лепестков.

В соцветии подсолнуха семечки образуют две спирали. Одна закручена по часовой стрелке, а другая против (Рис. 2). Количество этих спиралей чаще всего составляет два соседних числа Фибоначчи: 34 и 55, 55 и 89 или даже 89 и 144.

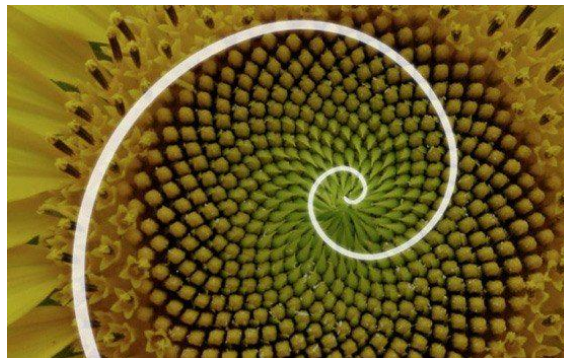


Рис. 2 – золотое сечение в подсолнухе

Чешуйки сосновой шишки также располагаются по спиралям, число которых соответствует числам Фибоначчи. В одну сторону, например, их 5, а в другую 8. У ананаса на кожуре происходит примерно такая же ситуация: 5, 8, 13 или 21 количество спиралей.

Пропорции человеческого тела также близки к золотому сечению. Например, если измерить фаланги пальцев, то отношение длины всей фаланги к длине большей ее части чаще всего оказывается равно 1,618. Таким же образом это работает с остальными участками тела – они соответствуют числу ϕ .

Почему же люди с такими пропорциями кажутся красивыми? Потому что человеческому мозгу проще обрабатывать информацию именно по принципу золотого сечения. Изображения, которые построены по принципу золотого сечения, требуют меньше усилий и времени, именно поэтому подсознательно оцениваются как правильные и красивые. Лица с сильными отклонениями требуют больше работы по анализу и подсознательно оцениваются как менее красивые. Конечно, на красоту влияет не только этот фактор золотого сечения. Но оно является, так скажем, базовой "матрицей гармонии", на которую мозг опирается при первой оценке.

Люди заметили, что золотое сечение выглядит красиво, поэтому стали применять его в своем творчестве. Например, древнегреческий храм Парфенон построен с использованием золотых пропорций. Его фасад вписывается в «золотой прямоугольник», стороны которого соотносятся как $1:\phi$.

В эпоху Возрождения интерес к античности возродил и интерес к идеальным пропорциям. Леонардо да Винчи, который и ввел термин «золотое сечение», использовал его в своих работах. Его знаменитый рисунок «Витрувианский человек» (Рис. 3) как раз и стал иллюстрацией идеальных пропорций человека. Также, золотое сечение можно увидеть в картине «Мона Лиза», где лицо, руки и линия горизонта подходят под критерии золотого сечения (Рис. 4).

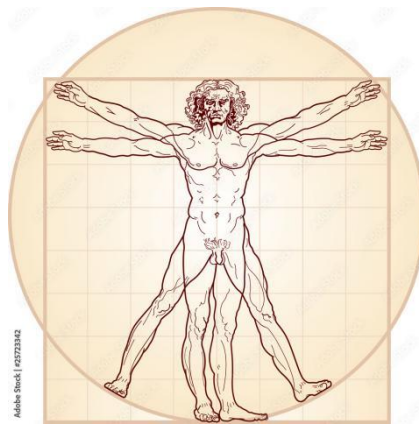


Рис. 3 – «Витрувианский человек»

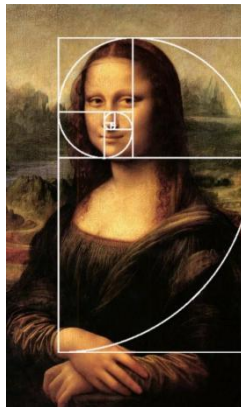


Рис. 4 – «Мона Лиза»

В русской архитектуре также можно найти идеальные пропорции. Например, у храма Василия Блаженного на Красной площади или Смольного собора в Санкт - Петербурге.

Золотое сечение очень актуально и в наше время. К примеру, логотипы, визитки, сайты созданы с учетом идеальных пропорций. Потому что мозг лучше воспринимает изображения с критериями золотого сечения и, благодаря этому, они кажутся красивее и могут заинтересовать.

Для студентов IT-специальностей числа Фибоначчи являются одной из главных тем, которую нужно изучить. На их примере проще понять многие вещи. Например, функция, которая будет вызывать саму себя – классическая рекурсивная функция вычисления числа Фибоначчи на python. Пример кода выглядит так:

```
def fib(n):  
    if n <= 1:  
        return n  
    return fib(n-1) + fib(n-2)  
for i in range(10):  
    print(f'F({i}) = {fib(i)}')
```

Рекурсивный подход красивый, но неэффективный. При вычислении больших чисел программа будет работать очень медленно. Здесь вступает в дейст

вие динамическое программирование – метод, при котором результаты промежуточных вычислений сохраняются и не нужно пересчитывать заново.

Пример кода:

```
def fib_fast(n):  
    a, b = 0, 1  
    for i in range(n):  
        a, b = b, a + b  
    return a  
for i in range(10):  
    print(f"F({i}) = {fib_fast(i)}")
```

Повторяющийся алгоритм вычисления чисел Фибоначчи, использующий всего две переменные, работает значительно быстрее и является примером наилучшего подхода к решению подобных задач. Например, для числа 40 рекурсивный алгоритм выполнит около 300 миллионов вызовов в программе, а этот – всего 40 шагов цикла.

Подобные задачи на числа Фибоначчи часто встречаются на собеседованиях при приеме на работу программистов. Кроме того, существуют классические алгоритмические задачи, решение которых напрямую сводится к числам Фибоначчи.

Числа Фибоначчи представляют собой удивительный пример того, как простая математическая идея, возникшая из задачи XIII века, проявляется в разных областях мира. Эти числа встречаются везде: в строении растений, в пропорциях человеческого тела, в древних архитектурных шедеврах и в современных программах. На примере чисел Фибоначчи хорошо видно, что математика это буквально язык, на котором написано почти все, что нас окружает. Когда изучаешь эту науку, замечаешь гораздо больше интересного, чем есть на самом деле.