

УДК 517. 445

ИСТОРИЯ ОДНОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Азовцев А.А., Колотилин Д. С. студенты гр. ЭПб-251
Научный руководитель: Казунина Г.А., д.т.н., доцент
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева, г. Кемерово

В курсах математического анализа функция задается формулой, по которой вычисляется значение функции $f(x)$ для значений независимой переменной x из области определения функции.

Однако при решении исследовательских задач в физике и технике часто требуется искать функцию, обладающую определенными свойствами, чтобы учитывая эти свойства, получить формулу, которая позволит анализировать изучаемый объект.

Так, изучая в 1929 году движение электронов в электрических и магнитных полях, английский физик-теоретик Поль Дирак, один из создателей квантовой механики, в своем классическом труде «Принципы квантовой механики» впервые ввел и широко использовал новую функцию, которую обозначил как $\delta(x)$ и назвал дельта-функцией. Сейчас ее называют дельта-функцией Дирака. Это была не обычная функция. Ее можно описать следующим соотношением [1]:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad \text{при условии} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (1)$$

Такую запись дельта-функции можно понимать как предельный физический процесс (импульсное воздействие), в котором рассматривается бесконечно большая величина (например, сила или какое – либо воздействие), действующая в бесконечно малый промежуток времени с суммарным эффектом, равным единице [2].

Графически эта функция может быть представлена только символически в виде очень узкой (стремящейся по ширине к нулю) вертикальной полосы с амплитудой, уходящей в бесконечность.

Другими словами дельта-функция Дирака, исторически названная δ -функцией не является функцией в обычном смысле этого понятия. Значение функции в точке смысла не имеет, функция не задается какой-либо формулой и не может быть вычислена каким-либо способом, а определяется только действием, которое она производит.

Определяющим свойством дельта-функции является следующее: свертка импульсной функцией с любой другой функцией воспроизводит эту функцию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0). \quad (3)$$

Исследование интеграла от дельта-функции как функции верхнего предела интегрирования показывает, что график функции имеет вид «ступеньки»: так при $x < 0$ получаем значение $\eta(t) = 0$ в силу определения дельта-функции, а при $x > 0$ имеем

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau = 1.$$

То есть с помощью дельта-функции построена простейшая разрывная функция, которая называется функцией Хевисайда или единичной ступенчатой функцией. Хотя производная не существует в точках разрыва функции, по общему правилу о связи между интегралом и производной получаем:

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = \delta(x).$$

Таким образом, производная от разрывной функции выражается через дельта-функцию. Действительно, производная от функции Хевисайда в интеграле свертки играет ту же роль, что и дельта-функция [2, 3]:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \eta'(x)f(t-x)dx &= \eta(x)f(t-x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau) (-f'(t-x))dx = \\ &= f(-\infty) + \int_0^{\infty} (f'(t-x))dx = f(-\infty) - f(-\infty) + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Следовательно, после введения дельта-функции появилась возможность записывать производную от разрывной функции в точках разрыва, выражая ее через дельта - функцию.

Физики и техники многие годы активно использовали дельта-функцию, не вникая в строгое определение этого объекта, задолго до того, как импульсные функции «заслужили уважение» с среде математиков. Дирак и Хевисайд [3] писали: «Использование неклассических функций не связано с какими-либо нарушениями строгой теории, а является лишь способом, позволяющим в сжатой форме выражать определенные соотношения, которые в случае необходимости мы можем переписать в форме, не содержащей неклассические функции, однако отличающиеся чрезмерной громоздкостью, что ведет к утрате ясности приводимых выкладок». Математическое обоснование функ-

ций, подобных дельта-функции («обобщенных функций»), развили в своих трудах академики С. Л. Соболев, И.М. Гельфанд и другие ученые [1], а окончательное признание они получили в конце пятидесятих годов 20 века.

Простейшим примером применения дельта – функции Дирака и ступенчатой функции Хевисайда является их применение в теории автоматического управления [2, 3]. Так работа основных элементов систем управления (динамических звеньев) описывается при помощи дифференциальных уравнений. Главными же характеристиками динамических звеньев являются: 1) реакция системы на импульсное входное воздействие (дельта – функцию), которую называют импульсной переходной характеристикой или весовой функцией, 2) реакция системы на единичное постоянное входное воздействие $\eta(t)$, которую называют переходной характеристикой системы. Покажем это на примере низкочастотного фильтра

Низкочастотный или RC – фильтр задается дифференциальным уравнением

$$Ty' + y = x(t),$$

где $x(t)$ – входной сигнал, $y(t)$ – выходной сигнал, $T = RC$ – характеристика передающей системы (постоянная времени). Импульсная характеристика – ответ системы на импульсное входное воздействие $x(t) = \delta(t)$. Она находится путем перехода к преобразованиям Лапласа при нулевых начальных условиях. Для преобразования Лапласа дельта-функции справедливо [2]:

$$x(t) = \delta(t) \leftrightarrow 1.$$

Заменяя оригиналы на изображения $y(t) \leftrightarrow Y(p)$; $y'(t) \leftrightarrow pY(p)$, получаем алгебраическое уравнение

$$TpY(p) + yY(p) = 1.$$

Выражая из этого уравнения отношение изображения на выходе к изображению на входе и возвращаясь к оригиналу, получаем импульсную переходную характеристику $w(t)$:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{Tp+1} \leftrightarrow \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \eta(t).$$

$$w(t) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \eta(t).$$

Переходную характеристику или реакцию системы на единичное постоянное входное воздействие

$$x(t) = \eta(x) \leftrightarrow \frac{1}{p}$$

можно получить, используя свойство интегрирования оригинала для преобразований Лапласа [2]), как интеграл от импульсной характеристики:

$$h(t) = \left(\int_0^t \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) d\tau \right) \eta(t) = \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right) \eta(t).$$

Получив импульсную и переходную характеристики, можно найти реакцию системы на любой входной сигнал $x(t)$, например, с использованием формулы свертки

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t x(t - \tau) \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) d\tau \eta(t).$$

Список литературы:

1. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих физиков и техников // Зельдович Я.Б., Яглом И.М., Москва: «Наука». – 1982. – 502 с.
2. Казунина, Г.А. Математика: преобразования Фурье, преобразования Лапласа. - Кемерово: КузГТУ, 2015. – 128 с.
3. Сиберт У.М. Цепи сигналы системы 2 (в двух частях). – Москва: «Мир». –1988. – 352 с.