

УДК.531.36

**ЧИСЛЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ
ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ ВЫСОКИХ УГЛОВЫХ СКОРО-
СТЯХ: СРАВНЕНИЕ МАТРИЦЫ ПОВОРОТА И ПАРАМЕТРОВ РО-
ДРИГА-ГАМИЛЬТОНА**Магзумова А.А.¹, студентка гр. А-1-25, I курс,Юнусова С.М.², студентка гр. А-1-25, I курсНаучный руководитель: Хакимуллина Л. Ш³, к.т.н., доцент^{1,2,3}Казанский Государственный Энергетический Университет, г. Казань

Задачи управления ориентацией и навигации при высоких угловых скоростях важны в современном мире для обеспечения работоспособности целевой аппаратуры, а также в системах управления подвижными объектами, например космическими аппаратами (КА).

При численном интегрировании уравнений, описывающих кинематические и динамические системы, возникают проблемы численной устойчивости. В основном они связаны с особенностями уравнений, структурой методов интегрирования и возникающими в этом процессе ошибками [1].

Для описания кинематики вращательного движения могут применяться различные способы: углы конечного вращения, ортогональные матрицы, векторы конечных поворотов, кватернионы. Выбор способа будет зависеть от величин, которые необходимо описать, и от особенностей движения, которые необходимо учесть.

Далее будет рассмотрена численная устойчивость интегрирования кинематических уравнений вращательного движения при высоких угловых скоростях в двух указанных представлениях – матрицы поворота и кватернионов – и проведено их сравнение.

Ориентация твёрдого тела относительно инерциальной системы координат может быть задана ортогональной матрицей поворота, принадлежащей к группе собственных вращений трехмерного евклидова пространства вокруг фиксированной точки (начала координат), и удовлетворяющей условиям [2]:

$$R^T R = I, \det R = 1.$$

Кинематическое уравнение матрицы поворота в матричной форме имеет вид:

$$\dot{R} = R[\omega]_x, \quad (1)$$

где $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ – вектор угловой скорости тела, выраженный в связанной системе координат, а $[\omega]_x$ – кососимметрическая матрица, соответствующая векторному произведению [3].

Уравнение (1) является линейным относительно R при заданном ω и может быть проинтегрировано численно любым стандартным методом. Однако главная трудность состоит в том, что в процессе интегрирования из-за ошибок дискретизации и округления нарушаются условия ортогональности:

$$R^T R \neq I.$$

Пусть на некотором шаге интегрирования вычислена приближённая матрица R . Вследствие ошибок она перестаёт быть ортогональной:

$$R^T R \neq I$$

Мерой нарушения служит норма $\|R^T R - I\|_F$. Для поддержания физической достоверности необходима коррекция – проекция на группу $SO(3)$. Наиболее распространённые способы: полярное разложение и метод Грама-Шмидта [4].

Полярное разложение матрицы представляет её в виде произведения ортогональной матрицы U и симметричной положительно определенной матрицы P [7].

$$R = UP, \quad (2)$$

Для квадратных невырожденных матриц такое разложение существует и единственно. В контексте коррекции матрицы поворота нас интересует именно U – ближайшая (в смысле евклидовой нормы Фробениуса) ортогональная матрица к заданной R . Полярное разложение дает такое U , которое минимизирует $\|R - U\|_F$ среди всех ортогональных матриц. Если исходная матрица R близка к вращению, то U будет иметь определитель +1 (при условии, что $\det R > 0$). В противном случае можно скорректировать знак определителя, чтобы гарантировать принадлежность к группе собственных вращений трехмерного евклидова пространства вокруг фиксированной точки (начала координат) [6].

Метод Грама-Шмидта основан на разложении матрицы коэффициентов системы $Ax = b$ в произведение ортогональной и верхней треугольной матриц. Будем считать, что матрица A невырождена и, следовательно, ее столбцы a_i , $i = 1, 2, \dots$, линейно независимы. Идея QR-разложения матрицы A в произведение ортогональной и верхней треугольной матриц состоит в том, что столбцы матрицы Q , т. е. ортонормированные вектора q_i , $i = 1, 2, \dots$, должны образовывать то же пространство, что и столбцы матрицы A .

Равенство $A = Q \times R$ запишем в виде:

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = (q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где диагональные элементы r_{ij} отличны от нуля. Отсюда следует, что векторы $a_1, \dots, a_i$, могут быть выражены как линейные комбинации $q_1, \dots, q_i$ и обратно при условии обратимости верхних $i \times j$ блоков матрицы R .

Равенство (3) дает уравнения:

$$a_1 = r_{11}q_1,$$

$$a_2 = r_{12}q_1 + r_{22}q_2,$$

...

$$a_n = r_{1n}q_1 + r_{2n}q_2 + \cdots + r_{nn}q_n,$$

которые можно переписать в виде:

$$q_1 = \frac{a_1}{r_{11}},$$

$$q_2 = \frac{a_2 - r_{12}q_1}{r_{22}},$$

...

$$q_n = \frac{a_n - \sum_{i=1}^{n-1} r_{in}q_i}{r_{nn}}.$$

Остается определить коэффициенты r_{ij} . Алгоритм построения по заданному набору линейно независимых векторов a_1 , системы ортонормированных векторов $q_1, q_2, \dots, q_n$ и известен как *классический процесс ортогонализации Грама-Шмидта* [7].

В последние годы для описания ориентации в трёхмерном пространстве нашли применение кватернионные параметры Родрига–Гамильтона (кватернионы). Они принципиально обходят проблему нарушения ортогональности матрицы поворота, заменяя условие ортогональности более простым условием единичной нормы.

Кватернион — гиперкомплексное число вида:

$\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3$, где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$; i, j, k — линейно-независимые символы, подчиняющиеся следующим правилам умножения “ $\times$ ” кватернионов [2]:

$$i \times i = j \times j = k \times k = -1 ;$$

$$i \times j = -j \times i = k , i \times k = -k \times j = i , k \times i = -i \times k = j .$$

Для представления вращения используется единичный кватернион:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \quad q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 .$$

Кинематическое уравнение в кватернионной форме имеет вид [2]:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \times \omega , \quad (4)$$

где $\omega = (0, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$ — чисто мнимый кватернион угловой скорости, $\times$ — умножение кватернионов.

Кинематическое уравнение в эквивалентной матричной форме (для вектора $(q_0, q_1, q_2, q_3)^T$) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -[\omega]_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ v \end{pmatrix} , \quad (5)$$

где $[\omega]_x$ — кососимметрическая матрица, соответствующая вектору $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$.

Уравнение является линейным относительно q при заданном ω и его можно проинтегрировать численно любым стандартным методом. Однако главная трудность состоит в том, что в процессе интегрирования из-за ошибок дискретизации и округления нарушается условие единичной нормы $\|q\| = 1$.

Пусть на некотором шаге интегрирования вычислен приближённый кватернион q . Вследствие ошибок его норма перестаёт быть равной единице:

$$\|q\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \neq 1$$

Мерой нарушения служит величина $|\|q\| - 1|$. Для поддержания физической достоверности необходима коррекция — проекция на единичную сферу S^3 .

Самый простой и распространённый способ восстановления единичной нормы — деление кватерниона на его евклидову норму:

$$q_{correct} = \frac{q}{\|q\|} \quad (6)$$

Эта операция минимизирует евклидово расстояние $\|q_{correct} - q\|_2$ среди всех единичных кватернионов и гарантирует, что $q_{correct}$ соответствует повороту (при условии, что исходный q был близок к единичному) [8].

Сравнительный анализ матриц поворота и кватернионов (параметров Родрига–Гамильтона) для описания вращательного движения твердого тела выявил их различия в численном поведении при интегрировании кинематических уравнений при высоких угловых скоростях. Оба метода подвержены ошибкам дискретизации и округления: матрицы поворота теряют ортогональность, а кватернионы – единичную норму.

Для восстановления ортогональности матрицы поворота требуются сложные и ресурсоемкие процедуры, такие как полярное разложение или процесс Грама–Шмидта. Эти итеративные методы, включающие матричные разложения, становятся особенно обременительными при необходимости частой коррекции на каждом шаге интегрирования в условиях высоких скоростей.

В отличие от этого, коррекция кватернионов сводится к простой и быстрой операции нормализации – делению на евклидову норму. Эта операция не требует сложных матричных вычислений.

Таким образом, для задач управления ориентацией и навигации, особенно при высоких угловых скоростях, кватернионы являются предпочтительным выбором. Их преимущество заключается в значительно меньших вычислительных затратах на поддержание нормировки по сравнению с необходимостью поддерживать ортогональность матрицы поворота. Кватернионы обеспечивают лучшую численную устойчивость интегрирования при меньших вычислительных ресурсах, что критично для систем реального времени и высокоточного управления.

Список литературы:

1. Юдаков, А. А. Численные методы интегрирования уравнений движения многокомпонентных механических систем, основанные на методах прямого интегрирования уравнений динамики метода конечных элементов / А. А. Юдаков, В. Г. Бойков // Научно-технический вестник Поволжья. – 2015. – № 5. – 131-144 с.
2. Амелькин Н. И. Кинематика и динамика твердого тела / Н. И. Амелькин. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 62 с.
3. Шилов А. А. Об уравнениях кинематики твердого тела // Ученые записки ЦАГИ. – 2001. – Т. XXXII, № 1-2. – 119-132 с.
4. Скворцова М. И. Линейные алгебра и аналитическая геометрия : учебно-методическое пособие / М. И. Скворцова, И. В. Антонова, А. Г. Ратнов, Е. В. Соломонова. — Москва : РТУ МИРЭА, 2022. – 135 с.

5. Зубова А. Ф. Методы построения полярного разложения матрицы / А. Ф. Зубова, М. В. Стрекопытова // Инженерные технологии и системы. — 2012. — № 2. — 184-187 с.

6. Фаддеев Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры: учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 736 с.

7. Квасов Б. И. Численные методы анализа и линейной алгебры. Использование Matlab и Scilab : учебное пособие / Б. И. Квасов. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 324 с.

8. Решение кинематической задачи ориентации твердого тела в пространстве для построения системы инерциальной навигации: учебно-методическое пособие для студентов 3-4 курсов очной формы обучения в 2 ч. Ч. 1 / составители А. А. Красная, Ю. Д. Щеглова, А. Ю. Яковлев. — Воронеж : ВГУ, 2017 — Часть 1 — 2017. — 39 с.