

УДК 621

**LQR И SMC В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ МАГНИТНЫМ ПОДВЕСОМ:
ДИНАМИКА И ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЕ**

Курученко В.А., студент гр. ЭМ-41, 2 курс

Научный руководитель: Аниброев В.И., ассистент кафедры ЭАПУ

Новосибирский государственный технический университет

г. Новосибирск

В работе исследуются методы оптимального управления (LQR) и управления со скользящим режимом (SMC) применительно к нелинейной системе магнитной левитации третьего порядка. Приводятся математическая модель объекта с учётом нелинейности магнитной силы, зависимости индуктивности от зазора и обратной ЭДС движения. Описаны алгоритмы регуляторов с корректными формулами и параметрами настройки. Представлены результаты численного моделирования по интегральным критериям IAE, ISE, ITAE и суррогатному критерию энергопотребления $E_u = \int u^2 dt$.

The paper investigates optimal control (LQR) and sliding mode control (SMC) applied to a third-order nonlinear magnetic levitation system. The plant model incorporates magnetic force nonlinearity, gap-dependent inductance, and back-EMF. Both controller algorithms are described with consistent equations and tuning parameters. Numerical simulation results are reported via integral performance metrics IAE, ISE, ITAE and the surrogate energy criterion $E_u = \int u^2 dt$.

Ключевые слова: магнитная левитация, оптимальное управление, LQR, SMC, скользящий режим, граничный слой, энергосбережение.

Keywords: magnetic levitation, optimal control, LQR, SMC, sliding mode control, boundary layer, energy saving.

1. Введение

Магнитная левитация широко применяется в мехатронике благодаря отсутствию механического трения и высокой точности позиционирования. Магнитные подвесы используются в системах позиционирования, виброизоляции и магнитных подшипниках. Их основным недостатком является необходимость постоянной активной стабилизации, сопровождающейся значительным энергопотреблением [1].

Для повышения энергоэффективности применяются современные методы управления. Наряду с оптимальным управлением (LQR) большой интерес представляют алгоритмы скользящего режима (SMC). Метод SMC с граничным слоем обеспечивает высокую робастность к возмущениям,

подавляет эффект дребезга (chattering) и прост в реализации [2]. В данной работе проводится сравнительный анализ LQR и SMC на нелинейной модели третьего порядка с целью оценки динамических характеристик и энергопотребления управляющего устройства.

2. Математическая модель магнитного подвеса

Рассматривается нелинейная модель третьего порядка. Вектор состояния:

$$x = [z, \dot{z}, i]^T$$

где z – вертикальный зазор между объектом и электромагнитом, i – ток катушки. Динамика механической подсистемы описывается уравнением движения:

$$m \ddot{z} = F_{ma}^g(z, i) - mg - b \dot{z} + d(t) \quad (1)$$

где m – масса объекта, g – ускорение свободного падения, b – коэффициент вязкого демпфирования, $d(t)$ – внешнее возмущение. Таким образом, в модели явно учтено вязкое демпфирование.

Магнитная сила определяется выражением, принятым для электромагнитных подвесов [3]:

$$F_{ma}^g(z, i) = C(z) \cdot \frac{i^2}{z^2} \quad (2)$$

Коэффициент $C(z)$ зависит от зазора вследствие нелинейности магнитной цепи:

$$C(z) = \frac{C^0}{(1 + \alpha z)^2} \quad (3)$$

где C_0 – начальный коэффициент, α – параметр нелинейности. Выражения (2)–(3) явно учитывают нелинейность магнитной силы.

Электрическая подсистема описывается уравнением цепи с учётом обратной ЭДС движения:

$$L(z) \cdot \dot{i} = u - R \cdot i - i \cdot \left(\frac{dL}{dz} \right) \cdot \dot{z} \quad (4)$$

Индуктивность зависит от зазора:

$$L(z) = \frac{L^0}{1 + k_L \cdot z} \quad (5)$$

где L_0 – начальная индуктивность, k_L – коэффициент зависимости. Уравнение (4) явно учитывает обратную ЭДС движения и зависимость индуктивности от зазора.

3. LQR в задачах управления магнитным подвесом

Регулятор LQR синтезируется на основе линеаризации нелинейной модели в рабочей точке z_{ref} . Линеаризация выполняется для каждой рабочей точки (с использованием метода адаптации коэффициентов), что позволяет учитывать нелинейность системы при изменении уставки. Дискретный регулятор синтезируется на основе дискретного уравнения Риккати (DARE), а

дискретизация непрерывной модели выполняется методом удержания нулевого порядка (ZOH) с периодом T_s [4].

Функционал оптимизации:

$$J = \int (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (6)$$

где Q и R – симметричные положительно (полу-)определённые матрицы весов. Матрица Q имеет диагональный вид с весами Q_z , $Q_{\dot{z}}$, Q_i по составляющим вектора состояния. Параметр R задаёт вес управляющего воздействия.

Равновесный ток, обеспечивающий левитацию в рабочей точке:

$$i_{eq} = z_{ref} \cdot \sqrt{\frac{mg}{C(z_{ref})}} \quad (7)$$

Эквивалентное управление (компенсация статики и обратной ЭДС):

$$u_{eq} = R \cdot i_{eq} + L(z_{ref}) \cdot \left(\frac{di_{eq}}{dt} \right) \quad (8)$$

Управляющий сигнал регулятора:

$$u = u_{eq} - K \cdot x \quad (9)$$

где K – вектор усиления, вычисленный решением DARE для текущей рабочей точки. Планирование коэффициентов усиления (gain scheduling) обеспечивает пересчёт K при изменении уставки z_{ref} .

4. Управление со скользящим режимом (SMC)

Алгоритм SMC с граничным слоем обеспечивает высокую робастность к внешним возмущениям и нелинейностям модели. Ошибка положения:

$$e = z - z_{ref} \quad (10)$$

Линейная поверхность скольжения:

$$s = \dot{e} + c \cdot e \quad (11)$$

где $c > 0$ – параметр, задающий динамику скольжения на поверхности. При $s = 0$ ошибка e экспоненциально убывает с постоянной времени $1/c$.

Управляющий сигнал:

$$u = u_{eq} - k \cdot \text{sat}\left(\frac{s}{\varphi}\right) \quad (12)$$

где u_{eq} – эквивалентное управление (аналогично формуле (8)), k – коэффициент усиления, определяющий робастность к возмущениям, φ – ширина граничного слоя, $\text{sat}(\cdot)$ – функция насыщения:

$$\text{sat}(\sigma) = \sigma, \quad |\sigma| \leq 1; \quad \text{sgn}(\sigma), \quad |\sigma| > 1 \quad (13)$$

Применение функции насыщения вместо функции знака ограничивает высокочастотные переключения управления (дрожание). Параметр φ уменьшает дрожание за счёт ввода граничного слоя вблизи поверхности скольжения. Параметр k определяет запас по возмущению: условие достижимости $|d(t)| < k$ должно выполняться для гарантированного выхода на поверхность скольжения. Параметр c задаёт скорость убывания ошибки в скользящем режиме.

5. Численное моделирование

Исследуемый сценарий: скачок уставки +50% от начального зазора. Начальный зазор $z_0 = 0.009$ м, целевой зазор $z_{ref} = 0.0135$ м. Длительность моделирования $T = 2.5$ с. Числовое интегрирование выполняется методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом $DT = 0.0001$ с. Дискретный регулятор обновляется с периодом $T_s = 0.001$ с.

Используются следующие интегральные критерии качества управления:

$$IAE = \int |e(t)| dt \quad (14)$$

$$ISE = \int e^2(t) dt \quad (15)$$

$$ITAE = \int t \cdot |e(t)| dt \quad (16)$$

Время установления определяется как время первого входа сигнала в 2%-ную полосу вокруг уставки и последующего пребывания в ней.

Для сравнения энергопотребления исполнительного устройства используется интегральный критерий управления:

$$E_u = \int u^2(t) dt \quad (17)$$

Критерий E_u является суррогатной метрикой энергопотребления. Реальная мгновенная мощность катушки определяется как $P = u \cdot i$, однако критерий u^2 позволяет корректно сравнивать регуляторы по уровню управляющего воздействия без измерения тока в каждый момент времени.

Таблица 1. Параметры модели и алгоритмов управления

Параметр	Обозначение	Значение
Масса объекта	m	0.068 кг
Равновесный зазор	z_0	0.009 м
Начальная индуктивность	L_0	0.415 Гн
Активное сопротивление	R	9.5 Ом
Коэффициент магнитной силы	C_0	9.4×10^{-5}
Коэффициент нелинейности $C(z)$	α	2
Коэффициент нелинейности $L(z)$	k_L	20
Коэффициент вязкого трения	b	0.05
LQR: вес по положению	Q_z	1×10^4
LQR: вес по скорости	$Q_{\dot{z}}$	1000
LQR: вес управления	R	0,50
SMC: коэффициент усиления	k	3
SMC: параметр поверхности	c	3
SMC: ширина граничного слоя	φ	0.060
Шаг интегрирования (RK4)	DT	0.0001 с
Период дискретизации	T_s	0.001 с

Длительность моделирования	T	2.5 с
----------------------------	---	-------

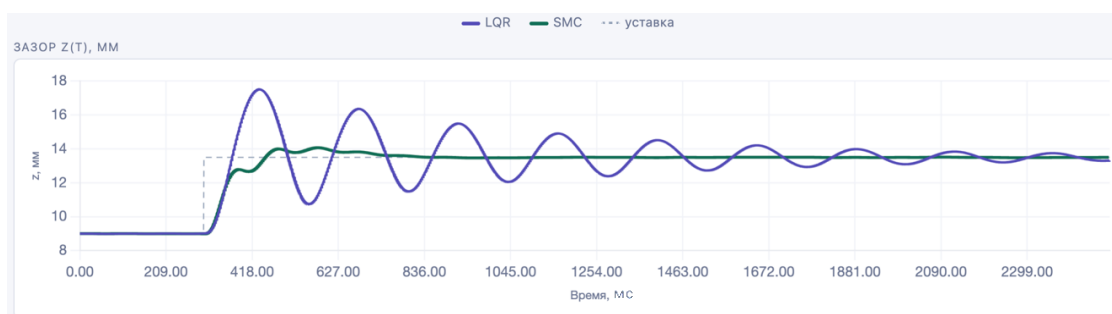
Рисунок 1. График переходного процесса $z(t)$ (скачок уставки +50%)Рисунок 2. Графики переходных процессов $U(t)$, $I(t)$ (скачок уставки +50%)

Таблица 2. Результаты моделирования (сценарий: скачок уставки +50%)

Метрика	LQR	SMC
$IAE = \int e dt$	2.030	0.381
$ISE = \int e^2 dt$	3.966	0.809
$ITAE = \int t e dt$	1.8307	0.1687
Время установления (2%)	1.164 с	0.500 с
$E_u = \int u^2 dt$	292.32	286.56

По результатам моделирования LQR обеспечивает время установления около 1.16 с, SMC – 0.50 с. По интегральным критериям ошибки SMC превосходит LQR в 5–11 раз: IAE составил 0.381 против 2.030, ITAE – 0.169 против 1.831. В исследуемом сценарии SMC показал уменьшение критерия $\int u^2 dt$ примерно на 2% по сравнению с LQR, что объясняется более быстрой стабилизацией и меньшим уровнем управляющего воздействия в переходном процессе. LQR формирует более гладкое управление в номинальных условиях благодаря явной минимизации функционала (6).

6. Заключение

В работе проведено сравнение регуляторов LQR (с адаптацией коэффициентов и дискретизацией ZOH) и SMC (с линейной поверхностью скольжения и граничным слоем) на нелинейной модели магнитного подвеса третьего порядка. Модель включает нелинейность магнитной силы,

зависимость индуктивности от зазора, обратную ЭДС движения и вязкое демпфирование. Оба регулятора обеспечивают устойчивую левитацию при скачке уставки +50%.

LQR обеспечивает оптимальное управление при известных параметрах системы и формирует гладкое управляющее воздействие. SMC демонстрирует более высокую робастность к возмущениям и, в исследуемом сценарии, меньшее время установления. Выбор регулятора определяется требованиями к робастности, точности и допустимому уровню управляющего воздействия для конкретного применения.

Список литературы:

1. Болдырев, В. В. Электромеханические системы с магнитной левитацией: учебное пособие / В. В. Болдырев. – Санкт-Петербург: Питер, 2016. – 240 с. – ISBN 978-5-496-01717-4.
2. Slotine, J.-J. E., Li, W. Applied Nonlinear Control / J.-J. E. Slotine, W. Li. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991. – 461 p. – ISBN 978-0130408907.
3. Sinha, P. K. Electromagnetic Suspension Dynamics & Control / P. K. Sinha. – London: Peter Peregrinus Ltd., 1987. – 400 p. – ISBN 978-0863411167.
4. Bertsekas, D. P. Dynamic Programming and Optimal Control: Vol. 1–2 / D. P. Bertsekas. – Belmont, MA: Athena Scientific, 2012. – 745 p. – ISBN 978-1886529434.