

УДК 531.24-3

ПИЗАНСКАЯ БАШНЯ: ОБЪЕКТ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ФИЗИКИ

Баркова С.Н., студент гр. УЗс-231, II курс

Научный руководитель: Дугинова Е.Б., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры
физики горного института КузГТУ

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

Пизанская башня – одно из самых известных архитектурных сооружений мира, которое уже несколько веков привлекает внимание не только туристов, но и ученых-физиков. Эта уникальная конструкция является прекрасным объектом для исследования различных аспектов физики, начиная от гравитации и заканчивая динамикой материалов. Пизанская башня является популярным историческим инженерным сооружением XII-го века (рис. 1).



Рис. 1. Пизанская башня.

Цель работы – изучение Пизанской башни на выявление условия равновесия башни, ее устойчивости.

Задачи исследования:

- изучить историю исследования Пизанской башни;
- рассмотреть в каких аспектах физики можно использовать Пизанскую башню в качестве объекта;
- рассчитать центр тяжести и определить центр масс.

Пизанская падающая башня – достопримечательность Пизы, итальянского города. Круглая башня из белого мрамора, построенная рядом с

собором. Сразу после ее возведения она начала наклоняться, сейчас этот наклон образует с вертикалью угол, близкий к $3,97^\circ$.

Существует легенда, будто Галилей проделал большой демонстрационный опыт, бросая легкие и тяжелые предметы с вершины башни. Описаний такого опыта нет. Башня была построена задолго до Галилея, и он, вероятно, пытался использовать ее для своих экспериментов. При жизни Галилея один из сторонников Аристотеля использовал башню для демонстрации различия падения тел [1]. Галилей ускорил истинное развитие физики, опровергнув нелепые догматические утверждения последователей Аристотеля, и, использовав идеализированный подход к экспериментальным фактам, тем самым положил начало новому этапу в развитии науки. Легенда о бросании различных предметов с падающей башни в Пизе ничего не дает даже в этом отношении [1].



Рис. 2. Эксперимент Галилея на Пизанской башне [2].

Причина наклона башни кроется в особенностях грунта, на котором стоит сооружение. Во время строительства башни фундамент был заложен неравномерно, что привело к постепенному наклону конструкции. Однако удивительным остается тот факт, что несмотря на значительный угол наклона, башня продолжает стоять. Этот феномен можно объяснить с помощью центра масс. Центр масс – геометрическая точка, положение которой определяется распределением массы в теле, а перемещение характеризует движение тела или механической системы как целого. Распределение массы считается равномерным вокруг центра масс. В случае Пизанской башни центр масс смещается таким образом, чтобы обеспечить устойчивость сооружения даже при значительном наклоне. Это позволяет башне сохранять равновесие, несмотря на внешнюю нестабильность.

Физические свойства материалов играют ключевую роль в устойчивости конструкции. Башня построена из мрамора и кирпича, которые обладают различными физическими свойствами. Мрамор обладает высокой прочностью, что позволяет ему выдерживать значительные нагрузки. Кирпич же менее

прочен, но благодаря своей гибкости способен компенсировать деформации, возникающие в результате движения почвы. Эти материалы подвергаются постоянным нагрузкам, вызванным весом самой башни, а также воздействием внешних факторов, таких как ветер и землетрясения.

Пизанская башня представляет собой уникальный объект для изучения физики. Она демонстрирует принципы гравитации, динамику материалов и сопротивление материалов в действии. Исследования, проводимые на основе этой башни, помогают ученым лучше понимать поведение сложных конструкций и разрабатывать новые методы обеспечения их устойчивости.

Наш расчет будет теоретическим и с усреднением некоторых величин, так как в стенах могут находиться более дешевые, чем мрамор, материалы.

Исследования Пизанской башни проводились в разные годы. Во время строительства в 1298 году была создана первая комиссия экспертов для решения проблем, связанных с наклоном башни. Проверки проводились также в 1396, 1550 годах и неоднократно далее. Вторая комиссия экспертов была созвана в 1840 году для решения проблем, связанных с наклоном башни [3].

В 1964 г. итальянское правительство обратилось за помощью к международным экспертам для решения проблемы всё более увеличивающегося наклона башни. В 1990-2001 гг. были проведены наиболее активные исследования и реставрационные работы, направленные на стабилизацию башни (установка противовесов, удаление грунта из-под северной стороны фундамента). Более точной хронологии всех исследований Пизанской башни не существует в публичном доступе. Большая часть информации о ранних исследованиях хранится в архивах и требует отдельного исторического исследования [3].

Определение массы башни. Хотя в данных приводится значение массы Пизанской башни, но никто ее никогда не взвешивал. Поэтому в качестве одной из задач было попробовать рассчитать ее настоящую массу, зная ее геометрические и физические параметры.

Входные данные для расчета [4]:

– текущий наклон (по результатам исследования Opera Primazialedella Pisana на 2022) – $\alpha = 3,97^\circ$ ($\sin 3,97^\circ = 0,06232$);

– толщина полов варьируется в зависимости от уровня, где они расположены, полы в башне имеют толщину около $h = 1$ м (в среднем);

– высота $H = 55,86$ м;

– диаметр основания – 15,54 м, следовательно, $R = 7,77$ м;

– толщина наружных стен: уменьшается от основания к вершине (у основания – 4,9 м, на высоте галерей – 2,48 м);

– количество ярусов (считая звонницу) – $N = 8$;

– материал: башня выполнена из камня, который декорирован белым и светло-серым мрамором, при этом внутренний цилиндр изготовлен из кирпича. Поэтому можно принять $\rho = 2200$ кг/м³, т.к. до этого значения легкие камни, а после тяжелые.

Рассчитаем массу Пизанской башни, для этого необходимо узнать её объём. Предполагаем, что контур плит перекрытий проходит по центру стен. Примем башню за наклонный цилиндр. Формула для расчета наклонного цилиндра:

$$V = \pi^2 R H \sin \alpha.$$

Сначала необходимо рассчитать объём башни по внешнему контуру. Так как неизвестно на сколько каждый ярус меньше другого, будем приминать их одинаковыми:

$$V_1 = \pi^2 \cdot 7,77 \cdot 55,86 \cdot 0,06232 = 296,28 \text{ м}^3.$$

Далее нужно рассчитать объём стен башни, для этого рассчитаем объём внутреннего цилиндра и вычтем его из V_1 . При этом мы предполагаем, что толщина стен будет у всех этажей одинаковая и равная

$$\begin{aligned} d_{\text{ст}} &= 0,5 \cdot (4,9 + 2,48) = 3,69 \text{ м.} \\ R_{\text{вн}} &= R - d_{\text{ст}} = 7,77 - 3,69 = 4,08 \text{ м.} \end{aligned}$$

Объём стен башни:

$$V_2 = V_1 - \pi^2 \cdot R_{\text{вн}} \cdot H \cdot \sin \alpha = 296,28 - \pi^2 \cdot 4,08 \cdot 55,86 \cdot 0,06232 = 156,24 \text{ м}^3.$$

Рассчитаем объём плит перекрытий для всех этажей, т.к. их $N = 8$; радиус плит перекрытий:

$$R_{\text{пл}} = R_{\text{вн}} + d_{\text{ст}} \cdot 0,5 = 4,08 + 3,69 \cdot 0,5 = 5,925 \text{ м.}$$

$$V_3 = \pi^2 R_{\text{пл}} h \sin \alpha \cdot N = \pi^2 \cdot 0,06232 \cdot 5,925 \cdot 1 \cdot 8 = 32,39 \text{ м}^3.$$

Тогда общий объём будет:

$$V_4 = 156,24 + 32,39 = 188,63 \text{ м}^3.$$

Находим массу башни:

$$m = \rho \cdot V_4 = 2200 \cdot 188,63 = 414\,986 \text{ кг.}$$

При расчётах масса Пизанской башни составила 414 986 кг вместо ожидаемых 14 453 кг [4], это может дать возможность анализировать расположение и поведение центра тяжести конструкции. С учетом завышенной массы, центр тяжести может находиться ниже, чем предполагалось изначально. Это связано с тем, что большая масса обычно ассоциируется с дополнительной структурной поддержкой в нижней части здания. Более высокая масса может указывать на то, что башня может быть более устойчива, чем предполагалось, при условии равномерного распределения этой массы. Данные рассуждения касаются отклонения башни, поскольку более низкий

центр тяжести может положительно сказываться на её устойчивости. В дальнейших расчетах для более точного вывода мы будем брать массу 14 453 кг.

Определение центра тяжести; пересекает ли вертикальная линия, проведённая через центр масс башни, основание, где именно она его пересекает. Предполагаем, что все слои равномерно оказывают нагрузку и масса у них одинакова. Тогда формула

$$x_c = \frac{\sum(x_i \cdot m_i)}{\sum m_i}$$

примет вид:

$$x_c = \frac{\sum(x_i)}{N}.$$

Для удобства вычислений сделаем упрощенную модель башни (рис. 3) под уклоном в $3,97^\circ$ и опустим перпендикуляры на ось x из середины каждого этажа для нахождения координаты x каждого яруса (рис. 4). На рис. 3 и 4 красным цветом обозначена центральная ось под наклоном; зеленым – ось под углом 90° к основанию; черным – перпендикуляры к оси x из середины каждого этажа; желтым – линия центра тяжести.

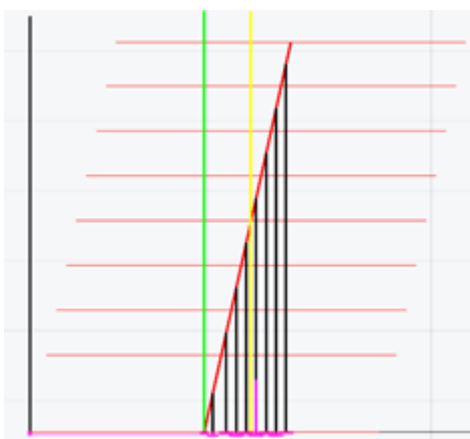


Рис. 3. Упрощенная модель башни в координатной сетке xu .

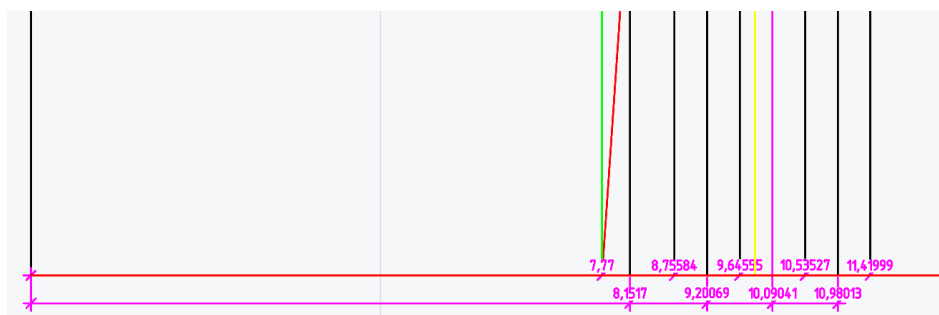


Рис. 4. Увеличенное изображение фрагмента рис. 1, с указанием координат проекций середины каждого яруса башни на ось x .

Подставляя полученные координаты в формулу, получим:

$$x_c = \frac{8,1517+8,75584+9,20069+10,09041+9,64555+10,53527+10,98013+11,41999}{8} = 9,85 \text{ м.}$$

Центральная ось под углом 90° проходит в 7,77 м от начала сетки координат. Следовательно, отклонение башни составляет 2,08 м. Линия центра тяжести пересекает основание, значит башня в устойчивом на данный момент состоянии.

Найдем критический угол, преодоление которого приведет к возможному падению Пизанской башни. Для определения критического отклонения используется формула, в которой предположи, что центр тяжести проходит на высоте $2/3$:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R}{2/3 \cdot H},$$

где θ – критический угол наклона.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{7,77}{2/3 \cdot 55,86} = 0,209646.$$

$$\theta = 11,84^\circ.$$

Построим упрощенную модель башни под таким углом (рис. 5). Опускаем перпендикуляр из вершины на ось x и находим, что вершина башни отклонена от прямого положения на 11,63 м.



Рис. 5. Модель башни, построенная под углом θ на координатной сетке $xу$.

Для наглядной демонстрации такого уклона построим стопку книг на столе (рис. 6). Сложим 7 книг друг на друга и начнем делать выступ каждый раз. Устойчивость такой башни теряется, как только центр тяжести выходит за основание. На фото представлена башня под критическим углом и в положении полного равновесия.



Рис. 6. Модель Пизанской башни из книг: башня под критическим углом θ (слева); башня под углом в 90° к основанию, в полном равновесии (справа).

Уникальность структуры Пизанской башни позволяет изучать динамическое взаимодействие сил, включая анализ смещения центра тяжести при наклоне. Современные инженерные решения стремятся к тому, чтобы центр тяжести всегда оставался внутри площади основания, тем самым предохраняя башню от падения. Пизанская башня служит не только историческим памятником, но и уникальным полигоном для изучения законов физики и инженерии. На её примере можно проследить, как взаимодействие между конструкцией и основаниями проявляется во времени, и как факторы, такие как давление, наклон и материалы, влияют на архитектурную устойчивость.

Список литературы:

1. Эрик Роджерс. Физика для любознательных. Том 1. Материя, движение, сила. Издательство «Мир», Москва. – 1969. – с. 473.
2. Наука. Величайшие теории: 9: Природа описывается формулами. Галилей. Научный метод. / Пер. с итал. – М.: Де Агостини, 2015. – 160 с.
3. Универсальная научно-популярная энциклопедия Кругосвет: Пизанская башня. URL: www.krugosvet.ru.
4. Материал из Википедии: Пизанская башня. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki?curid=104842>.