

УДК 519.63

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ
ДИФФУЗИИ НА ПЛОСКОСТИ МЕТОДОМ СЕТОК**

Чураков А.О., студент гр. ПМИ-221, III курс,
Желинский Е.А. студент гр. ПМИ-221, III курс
Научный руководитель: Мешечкин В.В., к.ф.-м.н., доцент
Кемеровский государственный университет
г. Кемерово

Работа посвящена математическому и компьютерному моделированию распространения загрязнений от точечных источников. При этом используется модель турбулентной диффузии, которая является частью группы моделей, описывающих рассеивания примесей в атмосфере. Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}u + \frac{\partial C}{\partial y}v + \frac{\partial C}{\partial z}\omega = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad (1)$$

где C – концентрация примеси, г/м³;

u, v, ω – скорость переноса вещества (атмосферный ветер) вдоль направлений x, y, z , м/с;

D_x, D_y, D_z – коэффициенты диффузии вдоль направлений x, y, z , м²/с

На плоскости уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}u + \frac{\partial C}{\partial y}v = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (2.1)$$

После переноса слагаемых его можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial C}{\partial x}u - \frac{\partial C}{\partial y}v. \quad (2.2)$$

Условно в правой части уравнения можно выделить две части: конвекцию и диффузию. Конвекцией является

$$-\frac{\partial C}{\partial x}u - \frac{\partial C}{\partial y}v, \quad (3)$$

диффузия – это

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Для численного решения уравнения можно использовать метод сеток. Для этого необходимо каждый член (2.1) аппроксимировать соответствующей разностной схемой.

Для конвекции (3) принято использовать «upwind schemes» (в переводе с английского – «схемы для наветренной стороны»). Смысл этих схем состоит в том, чтобы использовать правостороннюю разностную схему при ветре больше нуля (т.е. когда ветер дует на запад) и левостороннюю в ином случае.

Для использования метода сеток введём двумерную сетку размерности n на m с постоянными шагами по x и y , равными h_x и h_y соответственно.

С учетом вышесказанного, разностная схема для (3) примет вид

$$-\frac{\partial C}{\partial x}u - \frac{\partial C}{\partial y}v = -u \frac{C_{ij}^t - C_{(i-1)j}^t}{h_x} - v \frac{C_{ij}^t - C_{i(j-1)}^t}{h_y}, \quad \text{при } u, v > 0, \quad (5)$$

где C_{ij}^t – концентрация вещества в момент времени t в точке (i, j) , г/м²;

$C_{(i-1)j}^t$ – концентрация вещества в момент t в точке $(i-1, j)$, г/м²;

$C_{i(j-1)}^t$ – концентрация вещества в момент t в точке $(i, j-1)$, г/м²;

h_x, h_y – шаг сетки вдоль x и y соответственно;

u, v – средний ветер вдоль x и y соответственно, м/с.

Отрицательная скорость ветра в уравнении (5) свидетельствует о его обратном направлении.

Диффузионная часть (4) аппроксимируется трёхточечной разностной схемой

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = D_x \frac{C_{(i-1)j}^t - 2C_{ij}^t + C_{(i+1)j}^t}{h_x^2} + D_y \frac{C_{i(j-1)}^t - 2C_{ij}^t + C_{i(j+1)}^t}{h_y^2}, \quad (6)$$

где C_{ij}^t – концентрация вещества в момент времени t в точке (i, j) , г/м²;

$C_{(i-1)j}^t$ – концентрация вещества в момент t в точке $(i-1, j)$, г/м²;

$C_{i(j-1)}^t$ – концентрация вещества в момент t в точке $(i, j-1)$, г/м²;

$C_{(i+1)j}^t$ – концентрация вещества в момент t в точке $(i+1, j)$, г/м²;

$C_{i(j+1)}^t$ – концентрация вещества в момент t в точке $(i, j+1)$, г/м²;

h_x, h_y – шаг сетки вдоль x и y соответственно;

D_x, D_y – коэффициенты диффузии вдоль x и y соответственно.

Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} = & -u \frac{C_{ij}^t - C_{(i-1)j}^t}{h_x} - v \frac{C_{ij}^t - C_{i(j-1)}^t}{h_y} + D_x \frac{C_{(i-1)j}^t - 2C_{ij}^t + C_{(i+1)j}^t}{h_x^2} \\ & + D_y \frac{C_{i(j-1)}^t - 2C_{ij}^t + C_{i(j+1)}^t}{h_y^2}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Производная $\frac{\partial C}{\partial t}$ также может быть представлена разностной схемой, в результате чего (7.1) запишется как

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^{t+1} - C_{ij}^t}{h_t} = & -u \frac{C_{ij}^t - C_{(i-1)j}^t}{h_x} - v \frac{C_{ij}^t - C_{i(j-1)}^t}{h_y} + D_x \frac{C_{(i-1)j}^t - 2C_{ij}^t + C_{(i+1)j}^t}{h_x^2} \\ & + D_y \frac{C_{i(j-1)}^t - 2C_{ij}^t + C_{i(j+1)}^t}{h_y^2}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} C_{ij}^{t+1} = & h_t \left(-u \frac{C_{ij}^t - C_{(i-1)j}^t}{h_x} - v \frac{C_{ij}^t - C_{i(j-1)}^t}{h_y} + D_x \frac{C_{(i-1)j}^t - 2C_{ij}^t + C_{(i+1)j}^t}{h_x^2} \right. \\ & \left. + D_y \frac{C_{i(j-1)}^t - 2C_{ij}^t + C_{i(j+1)}^t}{h_y^2} \right) + C_{ij}^t. \end{aligned} \quad (7.3)$$

В итоге, получена разностная схема для исходного уравнения. Для ее решения необходимы начальные условия, которые можно представить множеством точек

$$\{C_{ij}^0\}, \quad (8)$$

где C_{ij}^0 – значение концентрации вещества в момент времени 0 в точке (i, j) .

Граничные условия необходимы для получения решения на границах сетки. Граничные условия можно задать константой, в таком случае граничные значения будут фиксированы. Такие условия называются граничными условиями Дирихле.

Необходимым условием устойчивости решения в явных разностных схемах является критерий Куранта – Фридрихса – Леви (критерий КФЛ). В общем виде он выглядит следующим образом:

$$C = h_t \left(\sum_{i=1}^n \frac{u_i}{h_{x_i}} \right) \leq C_{\max}, \quad (9)$$

где C – значение критерия;

h_t – шаг по времени;

u_i – коэффициент перед частной производной (в рассматриваемой модели – по конвекции $\frac{\partial C}{\partial x} u$ или $\frac{\partial C}{\partial y} v$ это будет u или v);

h_{x_i} – шаг по оси для соответствующей частной производной;

n – количество элементов в модели;

C_{\max} – максимальное значения критерия, для явных схем берётся равным единице.

В исследуемой модели две части: конвекция (3) и диффузия (4), каждая часть содержит по два элемента. Следовательно, критерий примет вид

$$C = h_t \left(\frac{u}{h_x} + \frac{v}{h_y} + \frac{D_x}{h_x^2} + \frac{D_y}{h_y^2} \right) \leq 1. \quad (10.1)$$

Отсюда можно выразить необходимый шаг по времени:

$$h_t \leq \left(\frac{u}{h_x} + \frac{v}{h_y} + \frac{D_x}{h_x^2} + \frac{D_y}{h_y^2} \right)^{-1}. \quad (10.2)$$

Согласно теореме Лакса, устойчивость является необходимым и достаточным условием сходимости решения в разностных схемах, соответственно, если критерий КФЛ будет выполняться, то схема будет сходиться.

Программная реализация модели проводилась с помощью языка python версии 3.12, использовались библиотеки matplotlib и numpy.

Входные параметры программы включают в себя размер области по x и y , шаги, время моделирования, среднюю скорость ветра, коэффициенты диффузии. В качестве примера было смоделировано рассеивание примеси со следующими параметрами: время – 60 секунд, скорость ветра вдоль X – 2 м/с, вдоль Y – 5 м/с, размер области – 50 м на 50 м, шаг по X и Y равен единице, шаг по времени 0.1, коэффициенты дисперсии равны 0.5. Использовался постоянный источник, генерирующий 1 г/м² загрязнения каждую 0.1 секунды. Результат моделирования представлен на рисунке 1.

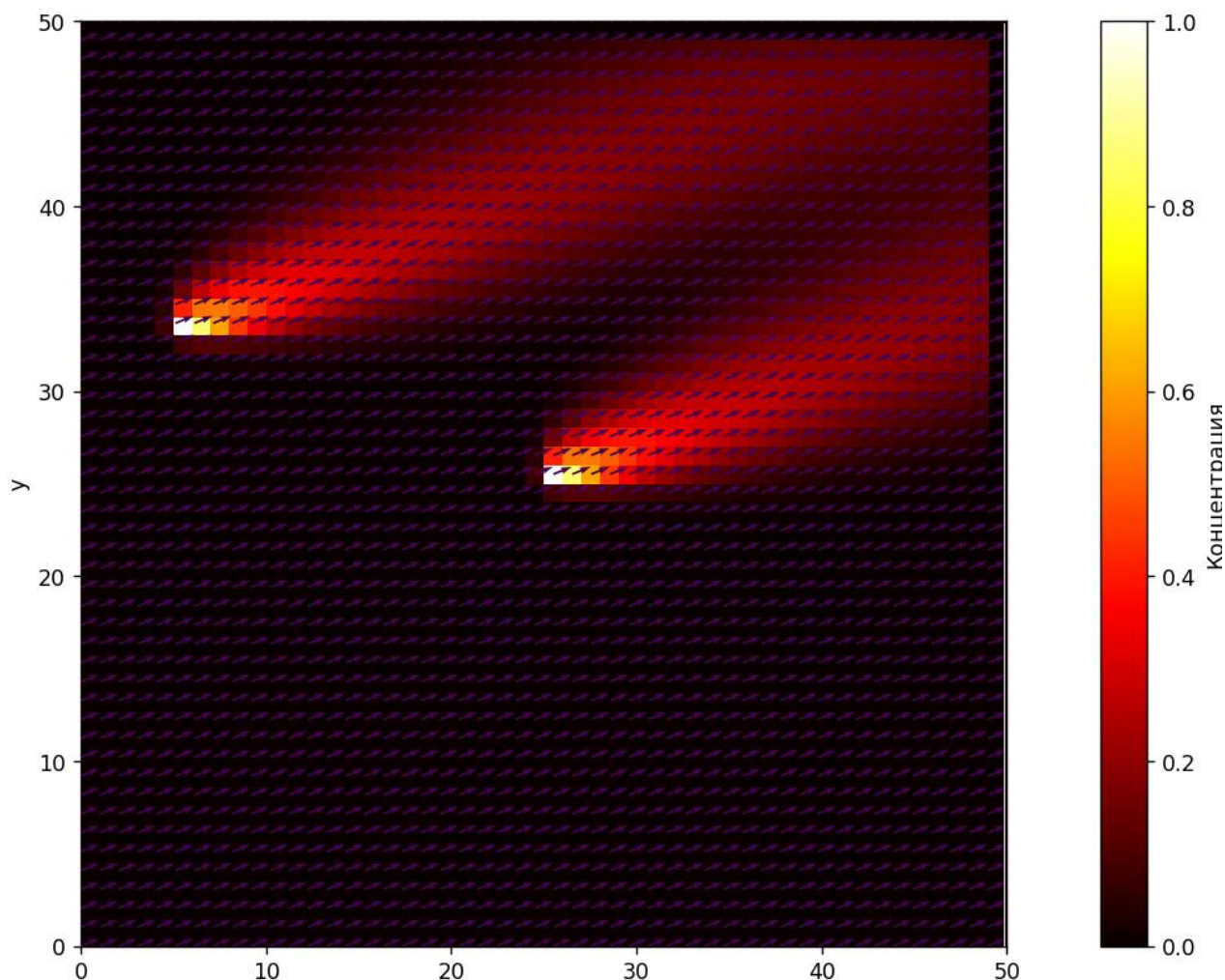


Рисунок 1. Результат моделирования

На рисунке 1 также отмечено направление ветра в каждой точке и приведена шкала концентрации (в г/м^2). Шкала концентрации размечается от 0 до 1, однако концентрация в источнике загрязнения немногим больше единицы (примерно 1.253 г/м^2). Использовалась простая двумерная растеризация, каждый пиксель (всего их 250) является квадратом со стороной 1 м, его цвет отображает концентрацию вещества (г/м^2).

В результате проведенного исследования была построена модель, позволяющая численно решать уравнения турбулентной диффузии на плоскости и визуализировать полученные результаты.

Список литературы

1. Наместникова, О. В. Обзор моделей загрязнения атмосферного воздуха в системе управления качеством среды обитания / О. В. Наместникова, Н. Г. Топольский // Пожары и ЧС. – 2015. – №2. – С. 64-70. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obzor-modeley-zagryazneniya-atmosfernogo-vozduha-v-sisteme-upravleniya-kachestvom-sredy-obitaniya> (дата обращения: 28.03.2025).

2. Бекман, И. Н. Высшая математика: математический аппарат диффузии: учебник для вузов / И. Н. Бекман. – 2-е изд., испр. и доп. – М: Издательство Юрайт, 2025. – 459 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-00025-2.
3. Курант, Р. О разностных уравнениях математической физики / Р. Курант, К. Фридрихс, Г. Леви // Успехи математических наук. – 1941. – №8. – С. 125-160.
4. Courant, R. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences / R. Courant, E. Isaacson, M. Rees // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1952. – №5(3). – P. 243-255.