УДК 512.563.3

ПРИЛОЖЕНИЯ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

Фишер А.С.[1], студентка гр. М-212, II курс
Научный руководитель: Тимофеева Е.Г.[1], старший преподаватель
[1]Сибирский государственный университет путей сообщения, г. Новосибирск

Булева алгебра – это такой раздел математики, который изучает логические операций и сопоставляет им значения истины или лжи. Основателем булевой алгебры является Джордж Буль (английский математик и логик). Он традиционные логические задачи начал решать посредством алгебраических методов. Он решил обозначать символами не числа, а высказывания, и показал, что вопросы об истинности и ложности можно решать уравнениями, схожими с алгебраическими. При этом содержание высказывания никак не сказывается на результат, оно характеризуется только значением истинности [1].

Клод Шеннон был одним из первых, кто показал, что булева алгебра может иметь прикладное применение в технике. В 1938 году он сформулировал теорию релейно-контактных схем, показав тем самым, что с помощью булевой алгебры можно проще анализировать релейные и переключательные схемы. Это открытие привело к созданию цифровой логики, которая стала фундаментом для современной электроники и компьютерных наук.

Некоторая величина может обозначаться булевой переменной, если выполняются данные условия:

1. Величина может принимать не более двух значений;
2. В любой момент времени величина не может принимать оба значения одновременно или не принимать ни одного из них;
3. При рассмотрении нескольких величин допускается, чтобы каждая из них принимала одно из двух состояний независимо.

Данные ограничения определяют границы применимости булевой алгебры при построении математических моделей.

Существует несколько операций в булевой алгебре, благодаря которым можно моделировать и анализировать логические системы. Под операциями принимают математические действия, которые применяются к булевым значениям. Фундаментальными операциями являются:

1. Конъюнкция (И). Логическое умножение. Результат данной операции истинен, когда оба утверждения истинны. Обозначается: $A \wedge B$.
2. Дизъюнкция (ИЛИ). Логическое сложение. Результат операции истинен, когда хотя бы одно из утверждений принимает истинное значение. Записывается: $A \vee B$.
3. Отрицание (НЕ). Данная операция меняет значение переменной на противоположное. Обозначается: $\neg A$.

Для более сложных логических условий используют дополнительные операции:

1. Исключающее ИЛИ. Сложение по модулю 2. Исинное значение операции получается, если только одно из утверждений истинно, а другое – ложно. Операция необходима, чтобы строго различать одно состояние от другого. Записывается: A⊕B.

2. Импликация. Результат принимает истинное значение во всех случаях, кроме как из истины следует ложь. Обозначается: A → B.

3. Эквиваленция. Операция принимает истинное значение, когда оба простых логических выражения имеют одинаковую истинность. Обозначается: A≡B или A↔B [1].

Одним из применений булевой алгебры является создание функциональных схем. Их можно реализовать в виде электронных устройств с конечным числом входов и выходов, на каждом из которых может появляться только два значения. Описывать работу данных схем помогает булева алгебра. В основе построения программного обеспечения лежат вентили – это простые механизмы, которые можно комбинировать между собой. Примеры таких вентилей изображены на рис. 1.

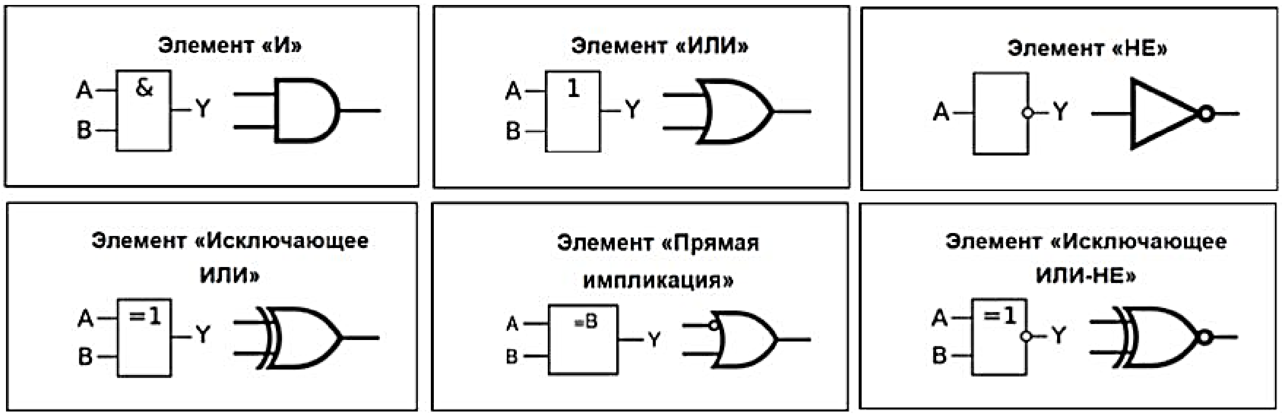

Рис. 1. Логические вентили

Пример функциональной схемы изображен на рис. 2. Данная схема реализована с помощью вентилей «И», «ИЛИ», «НЕ».

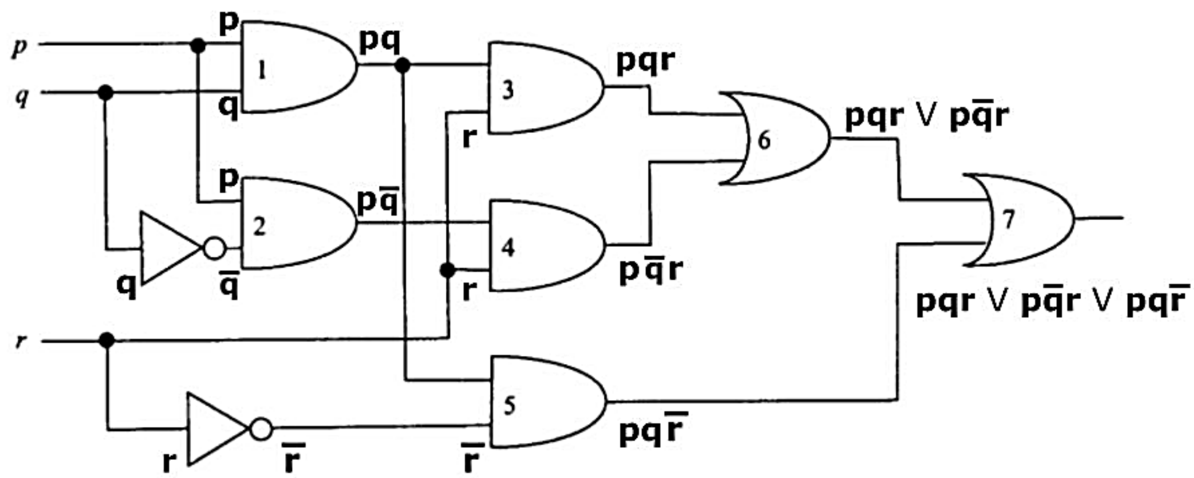

Рис. 2. Пример функциональной схемы

Рассмотрим законы де Моргана, используя которые можно упростить данную функциональную схему. Законы де Моргана – это логические правила, связывающие пары операций при помощи логического отрицания.

Первый закон гласит: Отрицание дизъюнкции двух простых высказываний равносильно конъюнкции отрицаний этих высказываний. Его можно записать в виде: НЕ (A∨B) ≡ (НЕ A) ∧ (НЕ B). *Второй закон:* Отрицание конъюнкции двух простых высказываний равносильно дизъюнкции отрицаний этих высказываний. Он записывается как: НЕ (A∧B) ≡ (НЕ A) ∨ (НЕ B) [2].

Для решения задачи с использованием карты Карно нам понадобятся следующие определения:

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) – это способ представления булевой функции как конъюнкции дизъюнкций литералов.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – это способ представления булевой функции как дизъюнкции конъюнкций литералов.

Литерал – фиксированное значение, которое присваивается переменной – константе.

Теперь рассмотрим пример.

Условие. У мальчика Коли есть мама, папа, дедушка и бабушка. Коля пойдет гулять на улицу, если ему разрешат хотя бы двое родственников [3].

Решение. Для удобства обозначим родственников Коли буквами:

мама – X_1

папа – X_2

дедушка – X_3

бабушка – X_4

Условимся обозначать согласие родственников единицей, несогласие – нулем. Возможность пойти погулять обозначим буквой f. Составим таблицу истинности в соответствии с условиями задачи (рис. 3 а).

Допишем к каждой строчке таблицы порядковый номер, начиная с 0. Перерисуем таблицу истинности в двухмерный вид, переставив в ней строки и столбцы в соответствии с кодом Грея. Для этого расположим значения из таблицы истинности в определенном порядке. В правом верхнем углу каждой ячейки на рис. 3 б написан номер строки, в соответствии с которыми располагаются значения булевой функции *f*.

x_1	x_2	x_3	x_4	f	
0	0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	0	**1**
0	0	1	0	0	**2**
0	0	1	1	1	**3**
0	1	0	0	0	**4**
0	1	0	1	1	**5**
0	1	1	0	1	**6**
0	1	1	1	1	**7**
1	0	0	0	0	**8**
1	0	0	1	1	**9**
1	0	1	0	1	**10**
1	0	1	1	1	**11**
1	1	0	0	1	**12**
1	1	0	1	1	**13**
1	1	1	0	1	**14**
1	1	1	1	1	**15**

Рис. 3 а). Таблица истинности

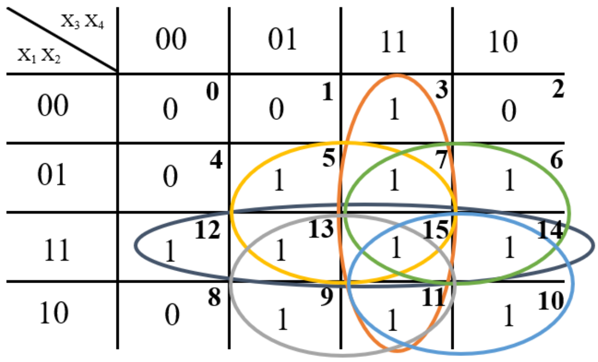

Рис. 3 б). Карта Карно для задачи

Приступим к склейке клеток в соответствии с правилами минимизации, для этого объединим клетки, содержащие одинаковые цифры, в области. Все области должны содержать 2^n клеток, они должны содержать в себе максимальное количество клеток, а самих контуров должно быть как можно меньше. Объединять можно как единицы, так и нули, но мы будем объединять единицы, чтобы составить дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). Для этого выберем одну из областей и рассмотрим координаты X_1, X_2, X_3, X_4. Например, выберем область желтого цвета, значения для ячеек которой мы брали из строчек 5, 7, 13 и 15. Начнем сравнивать координаты X_1 этой области. Видим, что $X_1 = 0$ и $X_1 = 1$, координаты принимают разные значения, поэтому X_1 мы не записываем. Рассмотрим X_2: $X_2 = 1$ и $X_2 = 1$. Координаты совпадают, поэтому записываем X_2. Таким же образом рассматриваем X_3 и X_4. X_4 имеет одинаковые координаты, поэтому мы его записываем. Получается, что для данной области мы получили конъюнкцию переменных X_2 X_4 для одной области. Повторяем те же действия для остальных областей, чтобы записать их конъюнкции. В случае, если неменяющаяся переменная нулевая, проставляем над ней инверсию. Полученные конъюнкции объединяем дизъюнкцией.

Получаем ответ: $f(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_3X_4 \vee X_1X_2 \vee X_2X_4 \vee X_1X_4 \vee X_1X_3 \vee X_2X_3$.

Данные примеры помогают разобраться с основами булевой алгебры, узнать фундаментальные определения и понять, в каких областях она может применяться.

Поэтому изучение информационных и математических дисциплин в высшей школе отражается на повышении качества образования [4]. Можно сделать вывод о том, что инновационное и технологическое развитие в высших учебных заведениях приводит к формированию компетенций в информационно-образовательной среде, что является очень важным фактором в дальнейшей деятельности специалистов [5, 6].

Список литературы

1. Булевая алгебра. URL: https://blog.skillfactory.ru/glossary/buleva-algebra/ (дата обращения: 24.03.25.)
2. Алгебра высказываний. Законы де Моргана. URL: http://sdo.vzm.su/informatika/inf3-5.shtml (дата обращения: 28.03.25)
3. Семенова И. В. Булева алгебра и ее применение при построении математических моделей. Самара: 2023. 100 с.
4. Тимофеева Е.Г. К вопросу о повышении качества образования с внедрением информационных технологий в высшей школе. В сборнике: Современная наука: проблемы и перспективы развития. Сборник статей VII Международная научно-практическая конференция. В 2-х частях. Под редакцией А.Э. Еремеева. – Омск, 2023. – С. 147-149.
5. Тимофеева Е.Г. Инновационное и технологическое развитие в высших учебных заведениях // Тенденции развития науки и образования. 2021. №80-5. С. 149-151.
6. Тимофеева Е.Г. К вопросу о формировании компетенций обучающихся в информационно-образовательной среде //Тенденции развития науки и образования. 2020. №66-4. С. 93-95.