УДК 378

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ ЗОНЫ ПОРАЖЕНИЯ ПРИ ВЫСТРЕЛЕ ИЗ ОРУДИЯ.

Толстиков Д. А., студент гр. МТб-241, I курс
Научный руководитель: Прейс Е.В., к.т.н., доцент
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева,
г. Кемерово

Рассмотрим ситуацию вылета снаряда из орудия с начальной скоростью υ_0. Будем считать снаряд материальной точкой, а точку вылета снаряда из орудия началом координат. Раскладывая скорости по первому уравнению, представленному ниже, и используя второй закон Ньютона, получим систему уравнений:

$$\upsilon = \upsilon_x + \upsilon_y$$

$$\begin{cases} m\dfrac{d\upsilon_x}{dt} = 0 \\ m\dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -mg \end{cases}$$

В системе уравнений мы пренебрегаем силой сопротивления воздуха, так как ее наличие сильно усложняет задачу. Обозначим угол поворота орудия с горизонтальной осью x как φ. Первое уравнение в системе дает нам $\frac{d\upsilon_x}{dt} = 0$, следовательно $\upsilon_x = const$, отсюда получаем $\upsilon_x(t) = \upsilon_x(0)$. Решим второе уравнение $\frac{d\upsilon_y}{dt} = -g$, применив операцию интегрирования от 0 до t, и получим зависимость υ_y от t

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_x(0) = \upsilon_0 \cos\varphi$$

$$\upsilon_y(t) = -gt + \upsilon_0 \sin\varphi$$

Найдем перемещения вдоль координатных осей:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \upsilon_0 \cos\varphi \\ \dfrac{dy}{dt} = -gt + \upsilon_0 \sin\varphi \end{cases}$$

Найдем интегралы от этих уравнений от 0 до t, учитывая тот факт, что в начальный момент времени снаряд находился на нулевых координатах. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 t \cos\varphi \\ y = \upsilon_0 t \sin\varphi - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Система уравнений дает возможность построить траекторию полета снаряда. Выразив t из первого уравнения системы и подставив во второе, можно получить уравнение траектории полета снаряда в более привычном виде.

$$y = x\tan\varphi - x^2\frac{g}{2{\upsilon_0}^2\cos^2\varphi}$$

Уравнение траектории полета снаряда является функцией двух переменных $y = f(x,\varphi)$, зависимость высоты полета снаряда y от горизонтального расстояния x при постоянном φ. Каждому значению φ соответствует определенная кривая. Объединяя эти кривые, получим некоторое семейство кривых. Будем считать $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$, $y \ge 0$, то есть орудие стреляет в цель, находящуюся на своем уровне или выше него. Углы $0 \le \varphi < \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} < \varphi \le \pi$ имеют практическое значение при рассмотрении случаев стрельбы по цели, расположенной ниже орудия. При углах $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ достигается максимальная дальность полета. Все траектории полета лежат в одной части плоскости, не попадая в другую часть. Тогда существует некоторая область, в которую нельзя попасть при заданной начальной скорости и при любом угле бросания.

Граница зоны, при которой происходит поражение цели снарядом, называется огибающей семейства кривых. Каждая точка, лежащая на этой границе, является точкой для одной из траекторий. Огибающая является касательной к каждой траектории. Каждой точке на огибающей соответствует конкретное значение x, и какое-либо значение φ, при котором функция $y = f(x,\varphi)$ достигает своего максимума при закрепленном x. Найдем максимум этой функции. Продифференцируем эту функцию по переменной φ:

$$\frac{\partial y(x,\varphi)}{\partial\varphi}\Big|_x = 0$$

Это уравнение связывает переменные x и φ. Для каждого x будет свое значение угла φ, при котором будет достигаться максимальное значение высоты полета снаряда y. Найдем связь между x и φ:

$$y = x\tan\varphi - x^2\frac{g}{2{\upsilon_0}^2\cos^2\varphi}$$

$$y'_\varphi = \frac{x}{\cos^2\varphi} - \frac{g}{2{\upsilon_0}^2}(-2\cos^3\varphi(-\sin\varphi))x^2$$

$$\frac{x}{\cos^2\varphi} - \frac{2x^2\cdot g\sin\varphi}{2{\upsilon_0}^2\cos^3\varphi} = 0$$

$$x\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{x\cdot g\sin\varphi}{{\upsilon_0}^2\cos^3\varphi}\right) = 0$$

$$\frac{{\upsilon_0}^2\cos\varphi - x\cdot g\sin\varphi}{{\upsilon_0}^2\cos^3\varphi} = 0$$

$${\upsilon_0}^2\cos\varphi - x\cdot g\sin\varphi = 0$$

$$\frac{{\upsilon_0}^2}{x\cdot g} = \tan\varphi$$

Подставляя полученное выражение в уравнение траектории полета снаряда, исключим φ:

$$y = x\frac{\upsilon_0{}^2}{x \cdot g} - \frac{g \cdot x^2}{2\upsilon_0{}^2} \cdot \left(\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)$$

$$y = \frac{\upsilon_0{}^2}{g} - \frac{g \cdot x^2}{2\upsilon_0{}^2} \cdot (\tan^2\varphi + 1)$$

$$y = \frac{\upsilon_0{}^2}{g} - \frac{g \cdot x^2}{2\upsilon_0{}^2} \cdot \left(\frac{\upsilon_0{}^4}{x^2 \cdot g^2} + 1\right)$$

$$y = \frac{\upsilon_0{}^2}{g} - \frac{g \cdot x^2}{2\upsilon_0{}^2} \cdot \frac{\upsilon_0{}^4}{x^2 \cdot g^2} + \frac{g \cdot x^2}{2\upsilon_0{}^2}$$

$$y = \frac{\upsilon_0{}^2}{g} - \frac{\upsilon_0{}^2}{2g} - \frac{g \cdot x^2}{2\upsilon_0{}^2}$$

$$y = \frac{\upsilon_0{}^2}{2g} - \frac{g \cdot x^2}{2\upsilon_0{}^2}$$

Применим полученную зависимость на практике. Допустим, на расстоянии $x = 400$ метров от орудия стоит стена высотой h, попробуем найти минимальную высоту h, при которой снаряд, вылетая из орудия с начальной скоростью 100 м/с, не сможет перелететь стену.

При помощи уравнения огибающей найдем максимальную высоту, на которую сможет подняться снаряд в точке x

$$y = \frac{100^2}{2 \cdot 9{,}8} + \frac{400^2 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 100^2} \approx 588{,}6 \text{ м}$$

Отсюда следует, что при высоте стены в 588,6 метров и более снаряд не сможет перелететь её.

Список литературы:

1. Элементы прикладной математики. Зельдович Я. Б., Мышкис А.Д. 1972. 592 с.
2. Высшая математика для начинающих физиков и техников. Зельдович Я.Б., Яглом И.М. М.,Наука ,1982. 512 с.