

УДК 517.445

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАСЧЕТОВ ПЕРЕХОДНЫХ
ПРОЦЕССОВ В СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Сариджа Н.С., магистр гр. ЭПмз – 241, I курс

Николаев А.В., аспирант ЭТа – 241, I курс

Научный руководитель: Казунина Г.А., профессор, д.т.н., доцент

Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева, г. Кемерово

Анализ переходных процессов в сложных электротехнических системах представляет собой весьма сложную задачу, особенно когда речь идет о традиционных методах решения. Одной из ключевых сложностей является необходимость определения констант интегрирования, которые появляются при решении дифференциальных уравнений, описывающих динамику этих систем. Эти константы, как правило, зависят от начальных условий и специфики самой системы, что делает анализ еще более запутанным. Иногда данный процесс может требовать значительных временных затрат, так как в каждой конкретной задаче необходимо проводить дополнительные вычисления и подгонки. Более эффективным является операторный метод или метод преобразований Лапласа, основанный на представлении временных процессов в комплексной плоскости. В этом методе каждой функции от времени сопоставляется аналогичная функция комплексной переменной p , которая выражается в виде $p = c + j\omega$, где c – действительная часть, а $j\omega$ является мнимой частью, пропорциональной угловой частоте [1-3]. Такое сопоставление позволяет работать с более удобными математическими формами, благодаря чему становится возможным избежать сложностей, связанных с решением обычных дифференциальных уравнений. Операторный метод упрощает процесс решения интегро-дифференциальных уравнений, которые формируются для электрической цепи согласно законам Кирхгофа, преобразуя их в алгебраические уравнения относительно комплексной переменной. Кроме того, он избавляет от необходимости определять постоянные интегрирования, так как начальные условия могут быть напрямую включены в уравнения исходной системы.

Решение задач с применением метода операционного исчисления выполняется в четыре последовательных этапа:

1. На первом этапе рассматриваем исходную функцию, которую обозначаем как $f(t)$, и называем её оригиналом. Для дальнейшей работы выполняем преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt,$$

преобразуя функцию $f(t)$ в функцию комплексной переменной $F(p)$. Это преобразование позволяет нам перейти от временной области к частотной, что значительно упрощает анализ систем [2-3].

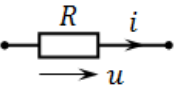
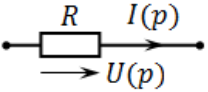
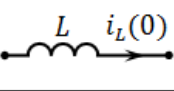
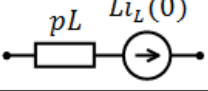
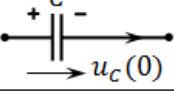
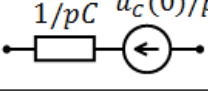
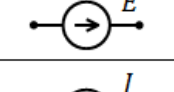
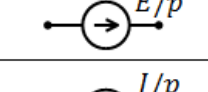
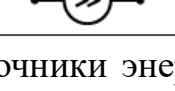

2. На втором этапе записываем систему уравнений Кирхгофа [1, 2], которая соответствует исходной задаче, а затем, используя свойства преобразований Лапласа (дифференцирование и интегрирование оригинала), преобразуем ее в систему алгебраических уравнений относительно изображений.

3. Третий этап заключается в решении полученной системы алгебраических уравнений относительно изображения $F(p)$. Это шаг критично важен, поскольку именно здесь мы можем определить параметры системы и извлечь необходимые характеристики, которые будут полезны в дальнейших расчетах.

4. Заключительный этап включает в себя обратное преобразование Лапласа. На этом этапе найденное изображение $F(p)$ возвращается к оригиналу $f(t)$ [3, 5]. Это позволяет вернуться во временную область и получить результаты, которые можно интерпретировать и применять на практике.

Применение преобразований Лапласа позволяет для удобства анализа задачи установить правило перехода от реальной цепи к операторной (табл.1).

Табл. 1. Преобразование цепи при расчете переходных процессов операторным методом

Исходная цепь	Операторная расчётная цепь
	
	
	
	
	

В операторной схеме источники энергии представляют собой изображения постоянных величин, таких как напряжение и ток. Это означает, что мы рассматриваем ситуации, в которых эти источники остаются неизменными в течение всего времени анализа. Такое предположение существенно упрощает процесс решения задач, позволяя сосредоточиться на ключевых аспектах системы. Однако в реальных системах часто имеют место начальные условия, которые могут отличаться от нуля. Чтобы учесть такие условия, вносятся соответствующие корректировки в операторную схему. Например, начальные токи, отличные от нуля, могут быть учтены добавлением источника тока в ветвь с индуктивностью. Это позволяет учесть влияние инерции индуктивности на начальном этапе. Аналогично, для учета начальных напряжений, отличных от

нуля, вводится источник напряжения в ветвь с емкостью, что позволяет правильно описать процессы зарядки и разрядки.

В настоящей статье сравниваются операторный и классический методы расчета переходного процесса в электрической цепи, представленной на рис.1.

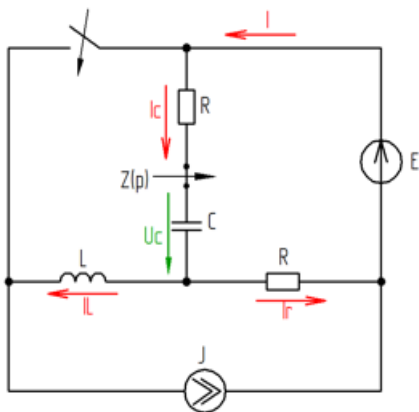


Рис. 1. Исходная схема электрической цепи и ее исходные данные:

$$E = 40 \text{ В}, J = 0,03 \text{ А}, R = 250 \text{ Ом}, L = 0,054 \text{ Гн}, C = 2,210^{-6} \text{ Ф}$$

Классический метод

1. Классический метод

После коммутации источник тока J закорочен (по внешнему контуру), и следовательно, в дальнейших расчетах не учитывается.

1) Расчет принужденного режима:

$$i_{R.ПР} = \frac{E}{R} = \frac{40}{250} = 0,16 \text{ А}$$

2) Характеристическое уравнение:

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + R + \frac{R * pL}{R + pL} = 0$$

$$R + pL + pCR^2 + p^2CRL + p^2CRL = 0$$

$$5,94 * 10^{-5} p^2 + 0,1915p + 250 = 0$$

$$D = 0,1915^2 - 4 * 5,94 * 10^{-5} * 250 = -0,02272775 < 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-0,1915 \pm j\sqrt{0,02272775}}{2 * 5,94 * 10^{-5}} = -1611,953 \pm j1269$$

$$= 2051,525 * e^{\pm j141,789^\circ}$$

$$i_R(t) = 0,16 + A * e^{-1611,953t} * \sin(1269t + \alpha). \quad (1)$$

3) Находим параметры свободного режима A и α :

а) для момента времени $t = 0 -$ (независимые начальные условия):

$$i_L(0 -) = i_L(0 +) = J = 0,03 \text{ A},$$

$$U_c(0 -) = U_c(0 +) = E + J * R = 40 + 0,03 * 250 = 47,5 \text{ В}.$$

б) для момента времени $t = 0 +$:

составим для схемы после коммутации систему уравнений по законам

Кирхгофа для определения зависимых начальных условий:

$$\begin{cases} i_L(0 +) + i_R(0 +) = i_c(0 +) & (2) \\ L \frac{di_L}{dt} + i_c(0 +) * R + U_c(0 +) = 0 & (3) \\ i_c(0 +) * R + U_c(0 +) + i_R(0 +) * R = E & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,03 + i_R(0 +) = i_c(0 +) \\ 250 * i_c(0 +) + 250 * i_R(0 +) = 40 - 47,5 = -7,5 \end{cases}$$

$$7,5 + 250 * i_R(0 +) + 250 * i_R(0 +) = -7,5$$

$$i_R(0 +) = -0,03 \text{ A}$$

$$i_c(0 +) = 0,03 - 0,03 = 0$$

Из уравнения (3) следует:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{-U_c(0+)}{L} = \frac{-47,5}{0,054} = -879,6296 \text{ A/c}.$$

Дифференцируем уравнения (2) и (4) и решаем их совместно:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} + \frac{di_R}{dt} = \frac{di_c}{dt} & \rightarrow \frac{di_c}{dt} = \frac{di_R}{dt} - 879,6296 \\ 250 * \frac{di_c}{dt} + \frac{i_c}{C} + 250 * \frac{di_R}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$250 * \frac{di_R}{dt} - 219907,407 + 250 * \frac{di_R}{dt} = 0$$

$$\frac{di_R}{dt} = 439,8148 \text{ A/c}$$

Получив необходимые данные на основе уравнения (2), составим систему уравнений (при $t = 0$) для определения коэффициентов свободного режима:

$$\begin{cases} A * \sin(\alpha) = 0,03 - 0,16 = -0,19 \\ -1611,953 * A * \sin(\alpha) + 1269 * A * \cos(\alpha) = 439,8148 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A * \cos(\alpha) = 0,1052 \\ A * \sin(\alpha) = -0,19 \end{cases} \rightarrow A = \frac{0,1052}{\cos(\alpha)}.$$

В результате получаем решение для переходного тока:

$$i_R(t) = 0,16 + 0,217 * e^{-1611,953t} * \sin(1269 * t - 61,0)$$

Операторный метод

Для решения операторным методом составляем схему замещения исходной цепи (рис.2):

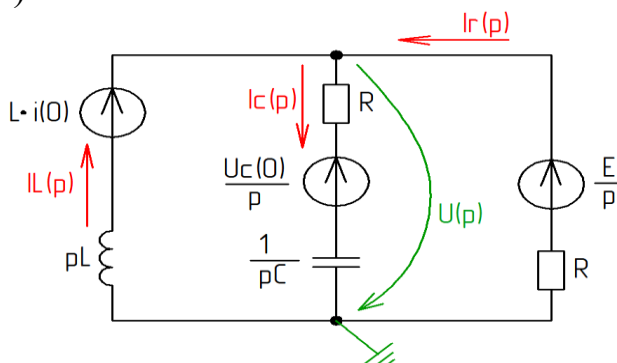


Рис. 2. Схема замещения.

Методом узлового напряжения [2,4] находим операторное изображение искомых величин тока и напряжения:

$$\begin{aligned} U(p) &= \frac{\sum(E_i \cdot Y_i)}{\sum Y_i} = \frac{\frac{L \cdot i(0)}{pL} + \left(\frac{pC}{pCR + 1}\right) \cdot \frac{uc(0)}{p} + \frac{E}{pR}}{\frac{1}{pL} + \frac{pC}{pCR + 1} + \frac{1}{R}} = \\ &= \frac{\frac{pCR^2L \cdot i(0) + L \cdot i(0) \cdot R + pCR \cdot L \cdot uc(0) + pCR \cdot L \cdot E + E \cdot L}{pLR(pCR + 1)}}{\frac{pCR^2 + R + p^2CRL + p^2CRL + pL}{pLR \cdot (pCR + 1)}} = \\ &= \frac{pCR^2L \cdot i(0) + pCR \cdot L \cdot uc(0) + pCR \cdot L \cdot E + L \cdot i(0) \cdot R + E \cdot L}{2 \cdot p^2CRL + pCR^2 + pL + R} \\ &= \frac{0,0028215 \cdot p + 2,565}{5,94 \cdot 10^{-5} \cdot p^2 + 0,1915p + 250}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_R(p) &= \frac{1}{R} \cdot \left[\frac{E}{p} - U(p) \right] = \frac{0,16}{p} - \frac{1,1286 \cdot 10^{-5} \cdot p + 0,01026}{5,94 \cdot 10^{-5} \cdot p^2 + 0,1915p + 250} = \\
 &= \frac{9,504 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + 0,03064p + 40 - 1,1286 \cdot 10^{-5} \cdot p^2 - 0,01026p}{p(5,94 \cdot 10^{-5} \cdot p^2 + 0,1915p + 250)} = \\
 &= \frac{-1,782 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + 0,02038 \cdot p + 40}{p \cdot (5,94 \cdot 10^{-5} \cdot p^2 + 0,1915p + 250)} = \frac{A(p)}{p \cdot B(p)}.
 \end{aligned}$$

Используя полученные выше при решении классическим методом корни уравнения

$$p_{1,2} = -1611,953 \pm j1269 = 2051,525 \cdot e^{\pm j80,77^\circ},$$

находим оценки:

$$A(0) = 40; \quad B(0) = 250$$

$$\begin{aligned}
 A(p_1) &= -1,782 \cdot 10^{-6} \cdot 2051,525^2 \cdot e^{-j76,422^\circ} + 0,02038 \cdot 2051,525 \\
 &\quad \cdot e^{j141,789^\circ} + 40 = 33,58725 \cdot e^{j80,77^\circ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(p_2) &= -1,782 \cdot 10^{-6} \cdot 2051,525^2 \cdot e^{j76,422^\circ} + 0,02038 \cdot 2051,525 \\
 &\quad \cdot e^{-j141,789^\circ} + 40 = 33,58725 \cdot e^{-j80,77^\circ}
 \end{aligned}$$

$$B'(p_1) = 2 \cdot 5,94 \cdot 10^{-5} \cdot 2051,525 \cdot e^{j141,789^\circ} + 0,1915 = 0,150756 \cdot e^{j90^\circ}$$

$$B'(p_2) = 2 \cdot 5,94 \cdot 10^{-5} \cdot 2051,525 \cdot e^{-j141,789^\circ} + 0,1915 = 0,150756 \cdot e^{-j90^\circ}.$$

Далее переходим от решения в изображениях к оригиналу [3,5]:

$$\begin{aligned}
 i_R(t) &= \frac{A(0)}{B(0)} + \frac{A(p_1) \cdot e^{p_1 \cdot t}}{p_1 \cdot B'(p_1)} + \frac{A(p_2) \cdot e^{p_2 \cdot t}}{p_2 \cdot B'(p_2)} \\
 &= \frac{40}{250} + \frac{33,58725 \cdot e^{j80,77^\circ} \cdot e^{-1611,953 t} \cdot e^{j1269t}}{2051,525 \cdot e^{j141,789^\circ} \cdot 0,150756 \cdot e^{j90^\circ}} + \\
 &\quad + \frac{33,58725 \cdot e^{-j80,77^\circ} \cdot e^{-1611,953 t} \cdot e^{-j1269t}}{2051,525 \cdot e^{-j141,789^\circ} \cdot 0,150756 \cdot e^{-j90^\circ}} \\
 &= 0,16 + 0,1085 \cdot e^{-1611,953 t} \\
 &\quad \cdot [e^{j(1269t-61,019^\circ-90^\circ)} + e^{-j(1269t-61,019^\circ-90^\circ)}] = \\
 &= 0,16 + 0,217 \cdot e^{-1611,953 t} \cdot \sin(1269 \cdot t - 61,019^\circ).
 \end{aligned}$$

$$i_R(0-) = -J = -0,03 \text{ A}.$$

В результате для оценки времени переходного процесса получаем:

$$t_{III} \approx \frac{5}{|p|} = \frac{5}{1611,953} = 0,0031 \text{ с},$$

что совпадает с результатом, полученным выше классическим методом.

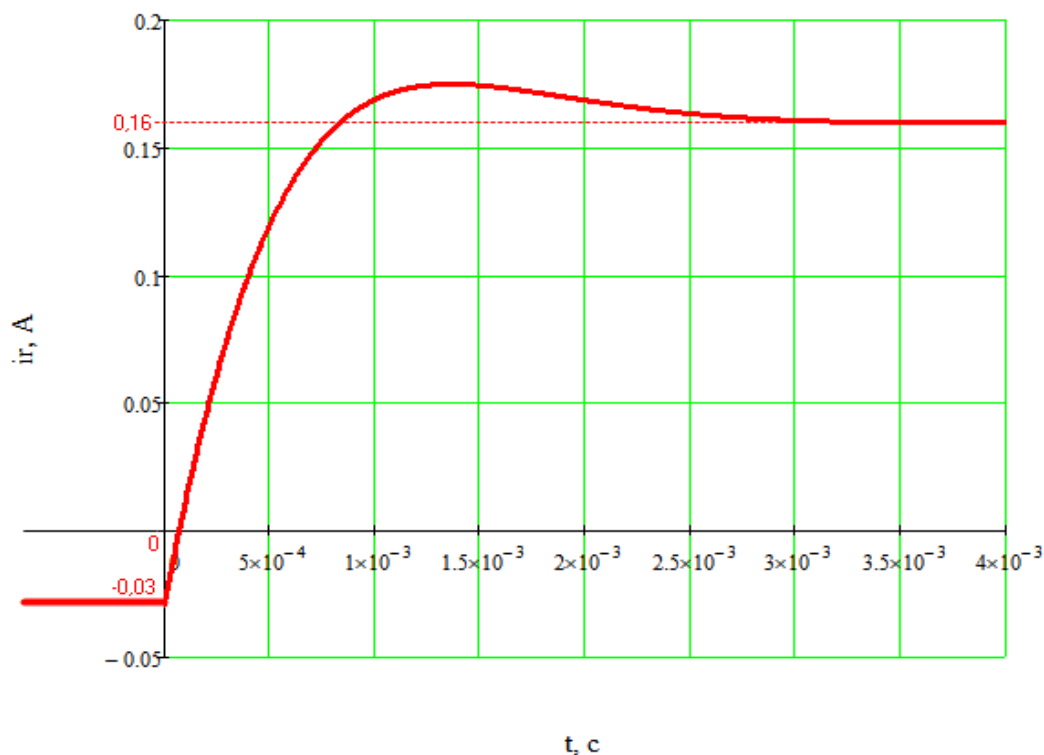


Рис. 3. Зависимость переходного тока от времени $i_c(t)$.

Таким образом, вне зависимости от выбранного метода, получили близкие оценки времени переходного процесса. Но как показывает опыт решения расчетных задач, для решения более простых задач удобнее пользоваться классическим методом, а при решении более сложных задач стоит использовать операторный метод, который является более универсальным.

Список литературы:

1. Атабеков, Г. И. Основы теории цепей / Г. И. Атабеков. СПб.: Издательство «Лань», 2006.– 425 с.
2. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники / Л.А. Бессонов. – М.: Гардарики, 2007.– 350 с.
3. Казунина, Г.А. Математика: преобразования Фурье, преобразования Лапласа: учеб. пособие / Г.А. Казунина. – Кемерово, КузГТУ, 2015.–128 с.
4. Матвеев, В.Н. Теоретические основы электротехники / В.Н. Матвеев, Т.М. Черникова. – Кемерово, КузГТУ, 2011.– 128 с.

5. Денисова А.В. Применение операторного метода и метода переменных состояния для расчета переходных процессов: Методические указания. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 105 с.