УДК 378

О ДВУХ СПОСОБАХ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики
Лопатко А.Е., студент гр. ГПс-241, I курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В статье представлены два различных подхода к решению алгебраических уравнений, содержащих иррациональность, которые покажем на следующем примере.

Пример. Решить уравнение:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11. \qquad (1)$$

Способ 1. Возводя формально в квадрат (без проверки ОДЗ) обе части уравнения (1), получим:

$$x-2+2\sqrt{(x-2)(4-x)}+4-x=(x^2-6x+11)^2$$

или

$$2+2\sqrt{-x^2+6x-8}=(x^2-6x+11)^2.$$

Тогда, обозначая

$$t=x^2-6x+11, \qquad (2)$$

перепишем последнее соотношение в виде

$$2+2\sqrt{3-t}=t^2. \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию $f(t)=t^2-2\sqrt{3-t}-2$ и исследуем её на экстремум. Отметим, что из (2) следует:

$t'(x)=2x-6=0$, отсюда следует, что $x=3$ – стационарная точка. Исследуем знак производной $t'(x)$:

I) $t'(0)=-6<0$, следовательно, $t(x)$ убывает;

II) $t'(4)=2>0$, следовательно, $t(x)$ возрастает.

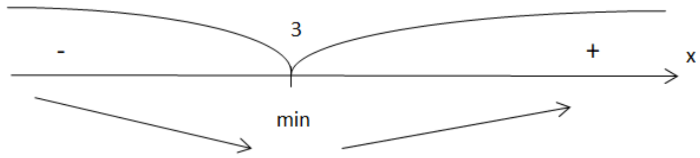

Рис.№1

Следовательно, $x = 3$ – точка минимума функции $t(x)$(смотри рис. №1). Тогда $t_{\min} = t(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 11 = 2 => t(x) \geq t(3) = 2$, т.е.

$$t \geq 2. \tag{4}$$

С другой стороны, из первой части (3) получаем: $3 - t \geq 0 => t \leq 3$. Таким образом, с учётом (4), имеем

$$\mathrm{t} \in [2; 3]. \tag{5}$$

Найдём стационарные точки функции $f(t)$:

$f^{'}(t) = 2t - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-t}}(-1) = 2t + \frac{1}{\sqrt{3-t}} > 0$ в силу (5). Поэтому $f(t)$ возрастает $\forall \mathrm{t} \in [2; 3]$. Тогда $f\min(\mathrm{t}) = f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$, то есть $f(t) \geq 0$, причём $f(2) = 0$. Так как (3) равносильно $f(t) = 0$, то $t = 2$ – единственный корень уравнения (3) (рис.№2).

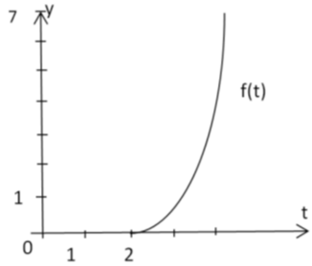

Рис.№2

Тогда, в силу (2), запишем $x^2 - 6x + 11 = 2$ или $x^2 - 6x + 9 = 0$, то есть $(x - 3)^2 = 0$, отсюда $x = 3$. Подставив найденное значение в (1), получим: $\sqrt{3 - 2} + \sqrt{4 - 3} = 3^2 - 6 \cdot 3 + 11$ или $1 + 1 = 2$ (истинно), то есть $x = 3$ – корень исходного уравнения (1). Отметим, что можно не учитывать замечание 1, т.к. выполняется условие (5). Ответ: $x = 3$.

Приведем несколько замечаний относительно разобранного выше примера.

Замечание1. Из первой части (1) следует, что

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases}, \text{таким образом}, \mathrm{x} \in [2; 4].$$

Замечание 2. Рассмотрим функцию $g(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}, x \in [2;4]$ и исследуем её на экстремум. Тогда $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{4-x}}\right)$. Найдём стационарные ее точки: $g'(x) = 0$. Тогда $\frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$, откуда

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{4-x}.$$

Таким образом, $x - 2 = 4 - x$. Следовательно, $2x = 6$, откуда получаем $x = 3$ – стационарная точка (рис.№3).

I) $g'(2{,}5) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1/2}} - \frac{1}{\sqrt{3/2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3/2}}\right) > 0$, отсюда $g(x)$ возрастает;

II) $g'(3{,}5) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{1/2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3/2}}\right) < 0$, отсюда $g(x)$ убывает.

Таким образом, $x = 3$ – точка максимума $g(x)$, т.е. $g(x) \le g_{\max} = g(3) = 2$.

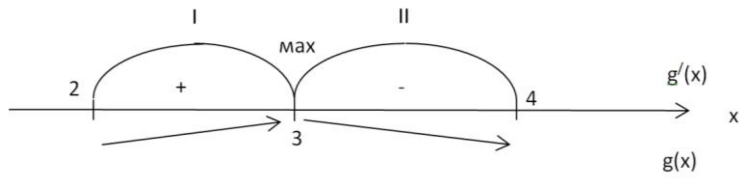

Рис.№3

С другой стороны, $t(x) \ge t_{\min} = t(3) = 2$ (см. (4)).

Поскольку (1) равносильно уравнению $g(x) = t(x)$ и

$$g(x) \le g(3) = t(3) \le t(x), \tag{6}$$

то есть последнее равенство возможно лишь при x=3, то x=3 – единственный возможный корень уравнения (1). Подстановкой x=3 в (1) убеждаемся, что x=3 – корень данного уравнения.

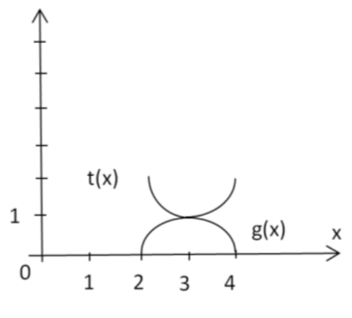

Рис.№4

Замечание 3. Соотношение (6) означает, что графики *y=t(x)* и *y=g(x)* касаются в единственной точке x=3 (смотри рис.№4).

Способ 2. Перепишем первую часть (1), выделив полный квадрат $x^2 - 6x + 11 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2\right) + 2 = (x-3)^2 + 2$. Делая замену $x - 3 = y$, получаем

$$x = y + 3. \qquad (7)$$

Перепишем уравнение (1) в виде: $\sqrt{y+1} + \sqrt{1-y} = y^2 + 2$. В свою очередь, полагая

$$y = \cos 2\varphi \qquad (8)$$

преобразуем последнее уравнение к равносильной форме

$$\sqrt{1+\cos 2\varphi} + \sqrt{1-\cos 2\varphi} = \cos^2 2\varphi + 2$$

или

$$\sqrt{2}(|\cos\varphi| + |\sin\varphi|) = \cos^2 2\varphi + 2\ .$$

Деля последнее соотношение на 2 , получим $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi \pm \sin\psi) = \frac{\cos^2 2\varphi}{2} + 1$, то есть

$$\sin(\varphi + \psi) = \frac{\cos^2 2\varphi}{2} + 1 \qquad (9)$$

где $\psi \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$. Из (9) следует: $1 \geq \sin(\varphi + \psi) = \frac{\cos^2 2\varphi}{2} + 1 \geq 1$

$\left(\text{так как } \frac{\cos^2 2\varphi}{2} \geq 0\right)$, поэтому $\frac{\cos^2 2\varphi}{2} + 1 = 1$, отсюда $\cos 2\varphi = 0$. Тогда, в силу (8), получаем $y = 0$, а значит, с учетом (7) найдем *x*=3.

Проверка: $\sqrt{3-2} + \sqrt{4-3} = (3-3)^2 + 2$ (истинно). Ответ: *x*=3.

Замечание. Данный метод не использует дифференциальное исчисление.

Список литературы:

1. В.Н. Березин, Л.Ю. Березина. «Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике». Москва «Просвещение», 1985, стр. 176.