УДК 378

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФОРМУЛ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева, г. Кемерово
Ханефт В.В., 11 класс, МБОУ «СОШ № 45», г. Кемерово

В данной статье предлагаются примеры задач на доказательство формул, основанные на методе мат. индукции, имеющем широкий спектр применения в алгебре, комбинаторике, геометрии, теории чисел и других разделах высшей математике. Данный метод – один из наиболее универсальных (хотя и не всегда применимых) методов доказательства тождеств, неравенств и утверждений, поэтому его можно отнести к базовым методам, являющимся фундаментальной составной частью математического образования студента. Напомним, что данный подход зиждется на следующих 2 последовательных этапах [1,2]: 1) убедиться в том, что рассматриваемое соотношение (утверждение, неравенство, формула) истинно при некотором начальном значении целого индекса, от которого оно зависит; 2) далее, предполагая, что оно верно для произвольного значения указанного индекса, требуется получить истинность соотношения при его следующем значении (что и обосновывает справедливость соотношения для любого целого индекса).

Указанный метод математической успешно применяют при доказательстве утверждений, соотношений более общего вида (напр., при решении задач на делимость), в комбинаторике, теории вероятностей, при рассмотрении геометрических задач и многих других.

Представленные далее две задачи демонстрируют использование описанного выше метода.

Задача 1.

Найти формулу стороны a_n правильного многоугольника, вписанного в круг радиуса R и содержащего 2^n сторон.

Решение:

Если значение $n=2$, то правильный полигон является квадратом. При этом его сторона $a_4 = R\sqrt{2}$. Тогда, согласно формулы удвоения

$$a_{n+1} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}\ , \tag{1}$$

запишем, что сторона правильного n-угольника, например, для n=8, 16, 32 определяется следующими выражениями (в соответствии с приведенной выше формулой удвоения (1)):

$$a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}\ ,$$
$$a_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ ,$$
$$a_{32} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ .$$

Анализируя последние 3 формулы, несложно выдвинуть гипотезу о том, что сторона правильного полигона из 2^n сторон для любого $n \ge 2$ выражается следующей формулой:

$$a_n = R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-2}}\ . \qquad (1')$$

Предполагая, что выражение, описываемое формулой (1’), является истинным, по формуле (1) имеем

$$a_{n+1} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - R^2\,\frac{2-\underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n-2}}{4}}} = R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1}}\ ,$$

т.е. получили формулу (1’) для $n+1$, а значит, она верна для всех $n \ge 2$.

Задача 2. Доказать, что имеет место разложение, называемое биномом Ньютона,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + C_n^n b^n\ . \qquad (2)$$

Отметим, что здесь $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}, C_n^0 = 1$ – число сочетаний из n по m, где $n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times (n-1)\times n$, причем $0! = 1$. Далее, $C_n^1 = n$. При этом одно из свойств чисел C_n^m следующее:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m\ , \qquad (3)$$

где $C_1^0 = C_1^1 = 1$. На свойстве (3) основано построение таблицы коэффициентов C_n^m (биномиальных коэффициентов), фрагмент которой представлен далее.

Треугольник Паскаля

Тождество (3) позволяет вычислять значения коэффициентов C_n^m рекуррентно, задавая $n=0$, потом $n=1$, 2 и т.д. Для большей наглядности и удобства представим результаты расчетов в виде следующей таблицы, называемой треугольником Паскаля:

Таблица 1. Треугольник Паскаля.

n	*Биномиальные коэффициенты* C_n^m												
0							*1*						
1						*1*		*1*					
2					*1*		*2*		*1*				
3				*1*		*3*		*3*		*1*			

4			*1*		*4*		*6*		*4*		*1*		
5		*1*		*5*		*10*		*10*		*5*		*1*	
6	*1*		*6*		*15*		*20*		*15*		*6*		*1*

Например, при $n=5$ из таблицы получим разложение

$$(a+b)^5 = b^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + a^4b + a^5 .$$

В строке с номером $n+1$ таблицы 1 расположены биномиальные коэффициенты $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$. При этом $C_n^0 = C_n^n = 1$, а остальные значения этих коэффициентов определяются формулой (3). Указанная формула означает, что для нахождения коэффициента C_n^m надо посчитать сумму ближайших к нему (соседних) чисел C_{n-1}^{m-1} и C_{n-1}^m, расположенных на одну строчку выше. К примеру, число 4 строки с номером 4 найдем как сумму соседних значений 3-й строки: 4=1+3; число 10 строки с номером 5 найдем как сумму соседних значений 4-й строки: 10=4+6 и т.д. Значения коэффициентов в треугольнике Паскаля необходимы для записи следующего выражения $(a+b)^n$ при его разложении по различным степеням параметров a,b (см. соотношение (2)). В частности, если n=2, 3, то по формуле (2), принимая во внимание, что соответствующие биномиальные коэффициенты находятся в строках 2 и 3 таблицы 1, найдем следующие представления:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$$

Здесь учтено, что коэффициенты последних двух разложений – это соответственно числа $C_2^0 = 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1$ и $C_3^0 = 1, C_3^1 = 3, C_3^2 = 3, C_3^3 = 1$ таблицы 1 в строках с номерами 2 и 3.

Проведем доказательство равенства (2) с помощью метода математической индукции.

Решение:

Шаг 1. При $n=1$ равенство (2) принимает вид

$$(a+b) = C_1^0 a + C_1^1 b .$$

Последнее тождество истинно, поскольку $C_1^0 = C_1^1 = 1$.

Шаг 2. Предположим теперь, что равенство (2) справедливо при $n=k$, т.е.

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + ... + C_k^m a^{k-m} b^m + C_k^k b^k \qquad (3)$$

Чтобы доказать истинность этого равенства при $n=k+1$, умножим обе части (3) на $(a+b)$. Получим:

$$(a+b)^{k+1} = (C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + ... + C_k^m a^{k-m} b^m + C_k^k b^k)(a+b) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + ... + (C_k^m + C_k^{m-1}) a^{k-m+1} b^k + ... + C_k^k b^{k+1}.$$

В самом деле, $a^{k-m+1} b^m$ может получиться лишь в следующих случаях: после умножения $C_k^m a^{k-m} b^m$ на a и при умножении $C_k^{m-1} a^{k-m+1} b^{m-1}$ на b. Учитывая, что $C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1,\ C_k^k = C_{k=1}^{k+1} = 1$, а также формулу (1), получим:

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + ... + C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m + ... + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} .$$

Последнее соотношение является тождеством (2) при $n=k+1$. Поэтому формула (2) методом математической индукции доказана для всех положительных целых значений показателя n.

Заметим, что формулу (3), используемую при построении таблицы 1, которая, в свою очередь, требуется для бинома Ньютона, также нетрудно обосновать на базе описанного выше подхода. Однако это выходит за рамки данной статьи.

Список литературы:

1. Н.Я. Виленкин. «Индукция. Комбинаторика». Пособие для учителей. М: «Просвещение», 1976. 244 с.

2. В.Н. Березин, Л.Ю. Березина. «Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике». М.: «Просвещение», 1985. 176 с.