УДК 378

МЕТОД МАТ. ИНДУКЦИИ ДЛЯ ТОЖДЕСТВ И НЕРАВЕНСТВ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент
Липина Г.А., старший преподаватель
Лисовая А.С., магистрант ЭПм-221, II курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

Предлагаемый в статье метод мат. индукции – один из самых общих и универсальных подходов для доказательства утверждений (неравенств, тождеств и иных соотношений) и является необходимой частью математического образования обучающегося. Доказательство по данному методу реализуется так [1,2]: Сперва доказываемое утверждение проверяем для начального значения целого показателя (как правило, n=1). Затем, в предположении его справедливости для текущего значения этого показателя, доказывают его истинность для следующего значения.

Приведем несколько примеров на применение метода математической индукции.

Пример 1. Доказать, что для $n \ge 3$ имеет место неравенство $2^n > 2n+1$.

Решение:

_1._ Легко убедиться, что при $n \ge 3$ неравенство истинно, поскольку $2^3 > 2 \times 3 + 1$

_2._ Допустим, что оно верно при $n = k$, где k –натуральное, т.е.

$$2^k > 2k+1. \quad (1)$$

Покажем, что оно верно и для $n = k+1$, т.е. выполняется

$$2^{k+1} > 2(k+1)+1.$$

В самом деле, принимая во внимание, что имеет место соотношение

$2^k \ge 2 \quad \forall k \in \mathrm{N}$ и складывая его с условием (1), имеем верное неравенство

$$2^k + 2^k > 2k+1+2,$$

что эквивалентно

$$2^{k+1} > 2(k+1)+1.$$

В итоге получили условие (1) для $k+1$, а значит, оно доказано для всех n.

Пример 2. Доказать, что справедливо равенство

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2)$$

Решение:

Шаг 1. При *n=1* гипотеза верна.

Шаг 2. Пусть гипотеза верна при некотором $n=k$, т.е.

$$1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Покажем, что формула (1) верна и при $n=k+1$:

$$1+2+...+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

В самом деле, с учетом индуктивного предположения имеем:

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Таким образом, индукцией по n равенство (1) доказано.

Пример 3. Доказать соотношение

$$1\times 2+2\times 3+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad (3)$$

Решение:

Тождество (3) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Шаг 1. При $n=1$ гипотеза верна, т.к. $1\times 2=\frac{1\times 2\times 3}{3}=2$.

Шаг 2. Допустим, что она выполнена для $n=k$:

$$1\times 2+2\times 3+...+k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Покажем, что она истинна при $n=k+1$:

$$1\times 2+2\times 3+...+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Действительно,

$$1\times 2+2\times 3+...+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=$$
$$=(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Значит, равенство (3) верно $\forall n\in N$.

Пример 4. Рассмотрим задачу о свертывании суммы

$$1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+...+n(n+1)(n+2).$$

Решение:

Методом математической индукции докажем равенство

$$1\times2\times3+2\times3\times4+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}. \tag{4}$$

Шаг 1. При *n=1* гипотеза верна, т.к. $1\times2\times3=\frac{1\times2\times3\times4}{4}=6$.

Шаг 2. Допустим, что гипотеза выполняется для $n=k+1$:

$$1\times2\times3+2\times3\times4+...+k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}. \tag{5}$$

Покажем, что в этом случае она справедлива и для $n=k+1$:

$$1\times2\times3+2\times3\times4+...+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

Учитывая (5), запишем

$$1\times2\times3+2\times3\times4+...+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)=(k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{k}{4}+1\right)=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

Т.о., формула (5) доказана $\forall n\in\mathrm{N}$.

Пример 5. Определить выражение для суммы

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+...+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение:

Сперва определим суммы для частных случаев, когда, напр., $n=1,2,3,4$. Тогда

$$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3};$$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4};$$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}.$$

Нетрудно заметить общую закономерность в правой части этих выражений: числитель (совпадающий с n) равен знаменателю, уменьшенному на 1. Можно предположить, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\ \forall n\in\mathrm{N}. \tag{6}$$

Докажем (6) индукцией по n.

Шаг 1. Для $n=1$ (6) истинна, поскольку $\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$.

Шаг 2. Допустим, соотношение (6) выполняется для $n=k$:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

Покажем, что оно выполнено при $n=k+1$:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Справедливы выкладки:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Следовательно, тождество (6) имеет место и при $n=k+1$, а значит, оно верно при любом натуральном n.

Список литературы:

1. Н.Я. Виленкин. «Индукция. Комбинаторика». Пособие для учителей. М: «Просвещение», 1976. 244 с.

2. В.Н. Березин, Л.Ю. Березина. «Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике». М.: «Просвещение», 1985. 176 с.