

УДК 514.18+521.1

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ И НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Дружинина С.В., студентка гр. ГМс-231, 1 курс

Побудей А.Е., студентка гр. ГМс-231, 1 курс

Шумкина Т.Ф., доцент

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В процессе изучения общеобразовательной дисциплины «Начертательная геометрия» обучающиеся первого курса технических вузов решают метрические и позиционные задачи, связанные с поверхностями вращения. Одним из представителей поверхностей вращения является прямой круговой конус – линейчатая поверхность, образованная вращением образующей (прямой линии) вокруг оси, имеющей с ней одну общую точку. При пересечении прямого кругового конуса плоскостью в сечении получают плоские фигуры – сечения, форма которых зависит от положения секущей плоскости [1]. Получающиеся сечения условно можно разделить на две группы – вырожденные и невырожденные сечения. К вырожденным сечениям относят точку, прямую, две прямых. Точка получается если секущая плоскость проходит через вершину конуса (рис. 1, плоскость P). Если секущая плоскость располагается касательно к боковой поверхности конуса получается прямая (рис. 1, плоскость T). При прохождении секущей плоскости через вершину конуса, с одновременным пересечением его основания, сечение конуса происходит по двум прямым (рис.1, плоскость R).

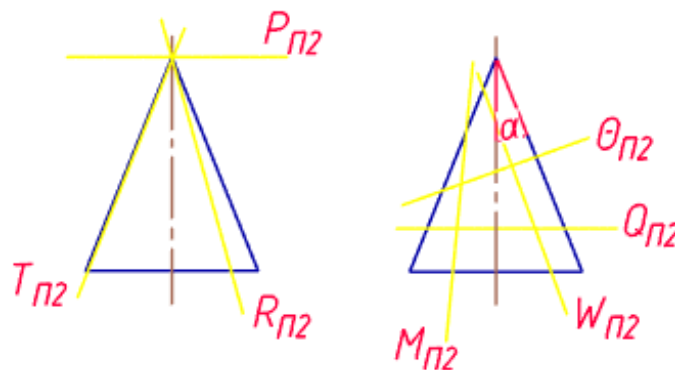


Рис. 1. Вырожденные и невырожденные конические сечения

Невырожденные сечения получают во всех остальных случаях, если секущая плоскость пересекает ось и хотя бы одну из очерковых образующих конуса. Так, если секущая плоскость располагается перпендикулярно оси поверхности, то в сечении получается окружность (рис. 1, плоскость Q). При

наклоне секущей плоскости к оси конуса под углом меньше 90° , но больше угла α (угол наклона образующих конуса к оси), то в сечении получается эллипс (рис. 1, плоскость θ). Парабола получается при пересечении конуса плоскостью под углом равным углу наклона образующей конуса (рис.1, плоскость W), а гипербола – если угол наклона секущей плоскости больше либо равен нулю, но меньше α (рис.1, плоскость M).

Фигура эллипса вытянута относительно большой оси и слегка сплюснута относительно другой (малая ось). На большой оси эллипса есть две особые точки, равноудаленные от точки пересечения осей и названные фокусами эллипса [2].

Получающуюся в сечении конуса окружность можно считать частным случаем эллипса, когда фокусы сливаются в центр, а большая и малая оси равны. Параболу же, как предельный случай эллипса, у которого один из фокусов удалён в бесконечность. Все эти сечения можно назвать «коническими сечениями» или «коникой».

Конические сечения известны со времен древней Греции. Еще Аполлонием Пергским (262-190 г. до н. э.) в монографии «Конические сечения» были описаны эллипс, гипербола и парабола [3].

В науке и технике конические сечения встречаются довольно часто, например, гипербола графически описывает взаимосвязь давления и объёма идеального газа (закон Бойля-Мариотта). В классической механике траекторией движения материальной точки или жёсткого сферического тела в поле гравитации является одно из конических сечений (в том числе и вырожденных) [4]. Параболические зеркала применяются в телескопах, антеннах и радарх, микрофонах с параболическим отражателем, прожекторах, автомобильных фарах.

Коническими сечениями также хорошо могут быть описаны и траектории движения небесных тел, изучаемых в разделе астрономии – небесной механики. Данный раздел изучает движения тел Солнечной системы (Солнца, планет, астероидов, комет, искусственных спутников и других космических тел) в гравитационном поле с учётом возникающих возмущений (реактивные силы, сопротивление среды, изменение массы, сила светового давления, электромагнитные силы, прилив и мн. др.).

Различают 4 группы задач, решаемых небесной механикой [5]:

1. Общие вопросы движения небесных тел в гравитационном поле (задача n тел).
2. Построение математических теорий движения конкретных небесных тел.
3. Численное определение значений фундаментальных постоянных (элементов орбит, массы планет и др.) путем сравнения теоретических исследований с астрономическими наблюдениями.
4. Составление астрономических ежегодников (астрономических эфемерид) с результатами теоретических исследований в области небесной механики, астрономии, звёздной астрономии, геодезии и т.д.

Еще в начале 17 века путем астрофизических наблюдений известным австрийским астрономом И. Кеплером были определены траектории движения планет Солнечной системы. Согласно первому закону И. Кеплера орбитами движения планет Солнечной системы является эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Следует отметить, что этот закон справедлив только для системы двух тел, но и в Солнечной системе он выполняется достаточно точно, даже для комет, движение которых может быть не только по эллиптической орбите, но и по гиперболической. Объяснение траектории движения небесных тел в форме конических сечений было получено после открытия силы всемирного тяготения И. Ньютоном.

Данный факт лег в основу открытия, сделанного в конце 17 века английским астрономом Эдмундом Галлеем, о эллиптической форме движения наблюдаемой им кометы и предсказанием возвращения ее в 1758 году.

Если проследить траекторию движения звёзд центра нашей галактики, снятых в инфракрасном диапазоне излучения, можно увидеть, что все звезды двигаются по эллиптическим траекториям с невидимым центром притяжения в фокусе эллипса [6]. Предположительно в этом месте находится чёрная дыра, масса которой примерно равна двум миллионам масс Солнца (рис. 2).

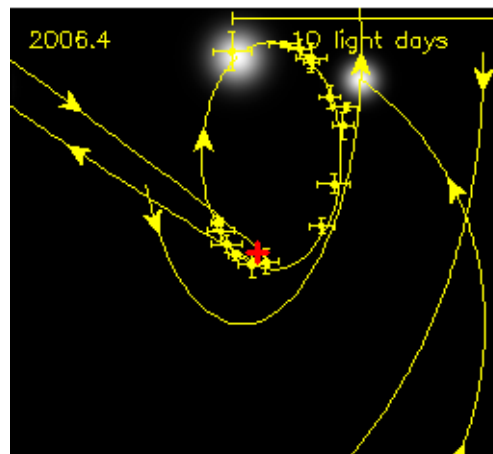


Рис. 2. Траектория движения звезд центра галактики Млечный путь

Вычисление орбиты движения небесных тел Солнечной системы осуществляется в несколько этапов. Сначала траектория движения небесного тела принимается в виде конического сечения, так называемая невозмущенная Кеплерова орбита. Далее путем последовательных приближений, при помощи дополнительных наблюдений, идёт уточнение (улучшение) предварительной орбиты, описанной коникой.

В действительности реальная орбита движения небесного тела рассматривается, как огибающая семейства непрерывно изменяющихся кеплеровых орбит под воздействием реальных возмущений.

Рассмотрим пример изменения траектории движения искусственного спутника Земли от скорости его движения. Чтобы обеспечить движение

спутника по круговой орбите (геостационарной), согласно второму закону Ньютона, скорость его движения должна быть равна восьми километрам в секунду – первая космическая скорость. В противном случае спутник не удержится на геостационарной орбите и будет двигаться по эллипсу, постепенно сближаясь с центром Земли и через некоторое время упадёт на неё. Для вывода спутника Земли на эллиптическую орбиту, с удалением от Земли, необходимо обеспечить начальную скорость больше первой космической, но меньше одиннадцати километров в секунду (вторая космическая скорость). В этом случае траектория движения спутника будет параболой, и он навсегда удалится от Земли. Движение небесного тела со скоростью выше второй космической скорости обеспечит ему гиперболическую орбиту.

Считается, что для межпланетных перелётов оптимальной траекторией с минимальными затратами энергии является биэллиптическая траектория – половинки двух соприкасающихся эллипсов (гомановская орбита), лежащих в одной плоскости [7]. Данное открытие было сделано в 1925 году немецким инженером В. Гоманом (рис. 3).

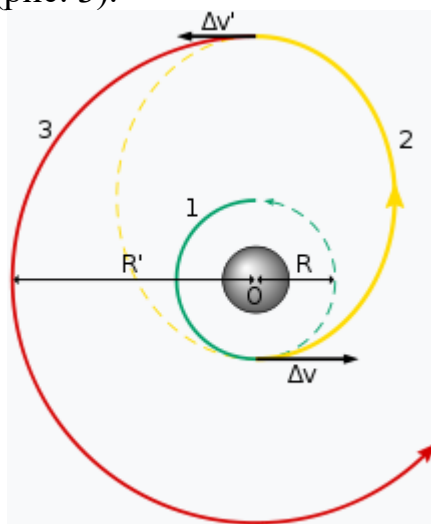


Рис. 3. Гомановская траектория перехода (жёлтый) с низкой круговой орбиты (зелёный) на более высокую круговую орбиту (красный)

Для изменения плоскости орбиты используют специальный маневр, так называемый межорбитальный перелет с высоким апогеем, основанный на выводе из второго закона Кеплера о том, что скорость движения тела минимальная в перигелии и для поворота плоскости орбиты на некоторый угол требуется относительно небольшое ускорение, что позволяет заметно сэкономить на топливе.

В межпланетных путешествиях космических аппаратов (рабочее тело – зонд, космическая ракета) используются, так называемые «гравитационные маневры», основанные на законе всемирного тяготения и использующие силу притяжения соседних планет для движения к заданной цели. Замедляясь или ускоряясь, при полете к небесному телу, небесный аппарат меняет направление движения согласно заданному маршруту. Траектория движения

зонда, изучавшего Солнце и Землю и с помощью гравитационных маневров направленного на встречу с кометами Джакобини-Циннера (1985 г.) и Галлея (1986 г.), также представляет собой комбинацию конических сечений, расположенных в разных плоскостях (рис. 4) [8].

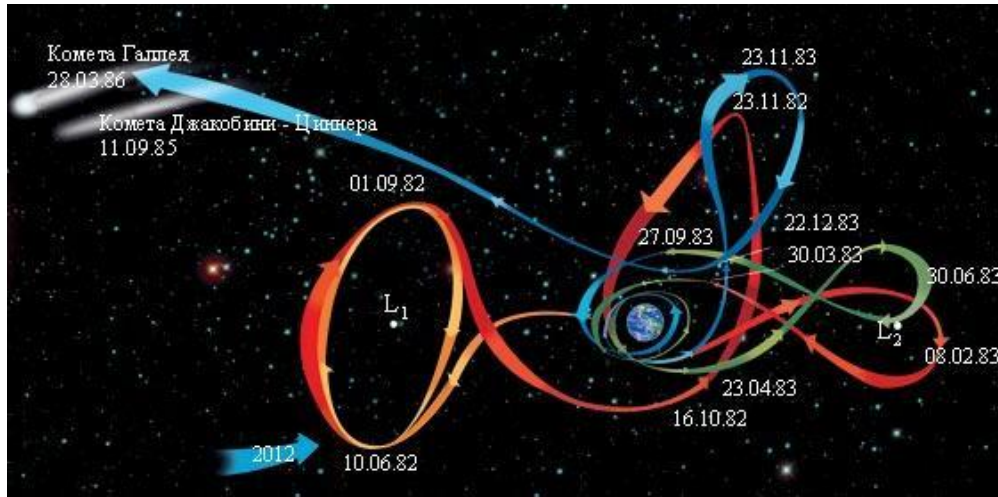


Рис. 4. Траектория движения зонда ISEE-3/ICE (рисунок NASA)

Но несмотря на коррекции гравитационных маневров, орбиты большинства межпланетных станций все-таки близки к коническим сечениям. Для учёта в равной степени притяжения сразу двух небесных тел, при расчёте траектории движения космического аппарата, применяют, так называемую «лестницу Лагранжа», что также экономит расход топлива.

Таким образом, конические сечения помогают рассчитать и предсказать орбиты движения небесных тел, искусственных спутников Земли, определить области нахождения ещё не открытых небесных тел, рассчитать траектории движения для межпланетных путешествий и, казалось бы, такие далекие области наук как начертательная геометрия и небесная механика имеют взаимную связь.

Список литературы:

1. Фролов С.А. Начертательная геометрия: учебник. – 3-е издание, переработ. и доп. – М.: ИНФА -М, 2010. – 285 с.
2. Веселов А.П., Троицкий Е.В. Лекции по аналитической геометрии. – М.: МЦНМО, 2017. – 152 с.
3. Рожанский И.О. Античная наука. – М.: Издание, 1980. – 198с.
4. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. – М.: Издательство МГУ, 2000. – 720с.
5. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. –Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. – 160 с.
6. Применение конических сечений в механике и астрономии [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/eea353c7-5529-c2e4-22a0->

f6ec8906aefe/00145620010576889.htm – Загл. с экрана. – (Дата обращения: 05.03.2024).

7. Эскобал П.Р. Методы определения орбит. –М.: Мир, 1970. – 476 с.

8. Исследование Солнечной Системы - Орбита Земли [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://galspace.spb.ru/orbita/12.htm> – Загл. с экрана. – (Дата обращения: 05.03.2024).