УДК 378.147.88

НАГЛЯДНОСТЬ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Солеева П.Л., студент гр. БС-24, II курс
Научный руководитель: Захарова Т.Э., доцент
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики
Г. Новосибирск

Математика - это удивительная и важнейшая область знаний, которая играет фундаментальную роль в различных аспектах нашей жизни. Её ценность трудно переоценить, поэтому заслуживает внимания и признания.

Математический анализ - это один из важнейший разделов математики, в котором изучаются пределы, производные, интегралы, ряды и т.д.. Важно отметить, что математический анализ может быть сложным для изучения. Но с правильным подходом, достаточным количеством времени и усилий он может быть успешно освоен. Для достижения понимания этого фундаментального предмета можно использовать различные методы, например, наглядные пояснения, примеры, задачи и тесты. Рассмотрим подробнее использование наглядности в различных задачах при изучении математического анализа.

Изучение математического анализа с применением визуальных методов предоставляет целый набор преимуществ, которые способствуют более глубокому усвоению математических концепций и их успешному применению в реальной жизни. Эта методика обучения отличается несколькими ключевыми преимуществами, создавая более наглядное и понятное представление математических концепций для студентов.

Во-первых, использование графических представлений и визуализации позволяет развивать геометрическое понимание математических процессов. Наглядные образы, такие как графики функций, помогают студентам видеть взаимосвязи между различными переменными и изменениями в функциях, что способствует более глубокому пониманию их поведения.

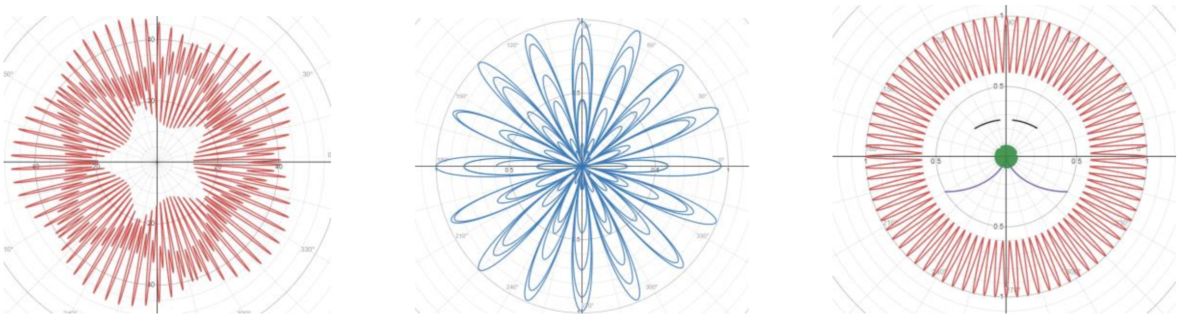
Во-вторых, визуальные методы обеспечивают интуитивное осознание математических идей. Студенты, имея возможность визуально оценивать влияние изменений входных параметров на графики и кривые, могут легче формировать интуитивное понимание сложных математических концепций.

Третье преимущество заключается в возможности применения математических знаний в реальной жизни. Визуализация математических концепций через реальные примеры и модели помогает студентам осознать, как математика применяется в различных областях, таких как физика, экономика или биология, что, в свою очередь, мотивирует их к более глубокому изучению предмета.

Кроме того, визуальные методы не только способствуют лучшему запоминанию математических правил и концепций благодаря зрительным асссоциациям, но и делают учебный процесс более интересным, стимулируя интерес студентов к изучению математического анализа.

Рассмотрим несколько задач, при изучении которых можно применить визуальный метод для их лучшего понимания.

При изучении «Математического анализа» и дальнейшем применении широко используются полярные координаты, например, в различных геометрических приложениях определенных и кратных интегралов. До обучения в вузе почти никто из студентов не был знаком с полярными координатами, в основном в школе изучается декартовая система координат. На лекции слушателям было предложено задание на данную тему, чтобы лучше понять материал и углубить знания в данной области: нужно было придумать какой-либо рисунок и с помощью полярных кривых изобразить его [1].



а б в

Рис. 1. Полярные кривые

На рис. 1 можно видеть результаты выполнения данного задания: 3 кривые, каждая из которых задается одним уравнением (рис. 1а, 1б), или системой уравнений (рис. 1в) [2]. При этом красота фигуры часто достигается за счет нескольких оборотов рисующего луча φ. «Звезда» на рис. 1а описывается уравнением

$$r(\varphi) = 30 + 18\sin(35\varphi)\sin(100\varphi),\ 0^\circ \le \varphi \le 360^\circ,$$

«цветок» рисунка 1б имеет уравнение

$$r(\varphi) = \cos(8\varphi)\sin(0{,}1\varphi) + 0{,}01\cos(2\varphi)\sin(12\varphi),\ 0^\circ \le \varphi \le 1800^\circ,$$

а «лев» на рисунке 1в нарисован несколькими кривыми:

$$r(\varphi) = 0{,}8 + 0{,}2\cos(80\varphi), \quad 0^\circ \le \varphi \le 360^\circ,$$

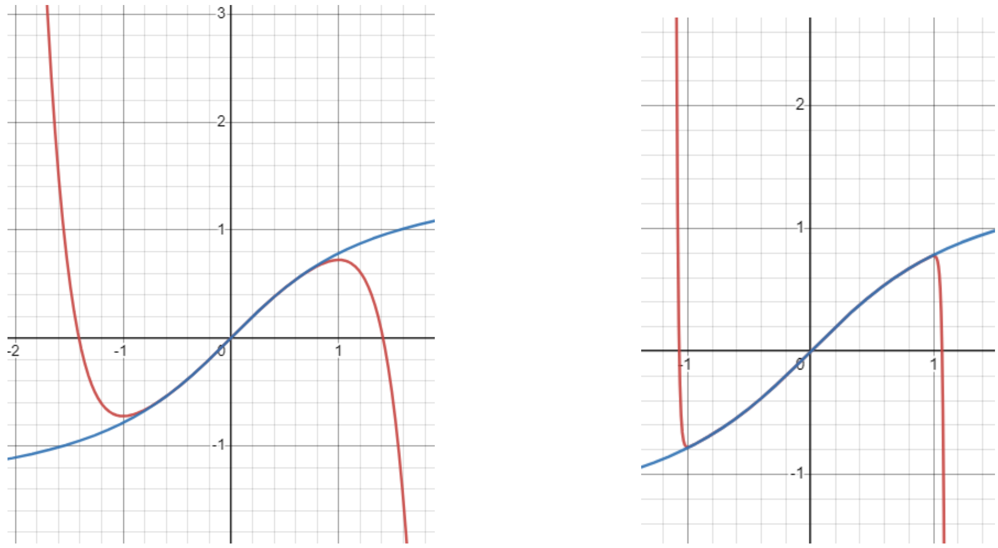
$$r(\varphi) = 1 + \sin\varphi, \quad 210^\circ \le \varphi \le 330^\circ,$$

$$r(\varphi) = \frac{2{,}1}{5 + 3\sin\varphi}, \quad 43^\circ \le \varphi \le 80^\circ,\ 100^\circ \le \varphi \le 138^\circ,$$

$$r(\varphi) = 0{,}08\cos(\pi\varphi), \quad 0^\circ \le \varphi \le 1980^\circ.$$

Выполнять задание можно не только в электронном виде, но и на бумаге, однако это займет намного больше времени. Данное творческое задание вызвало огромный интерес у студентов – была создана целая галерея «полярных» рисунков студентов в электронной среде курса.

В третьем семестре поток направления «Информационная безопасность» изучал темы раздела «Функциональные ряды». Если некоторая функция определена, непрерывна и бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0 и некоторой ее окрестности, то функцию можно разложить в степенной ряд или ряд Тейлора. Такой ряд в окрестности точки $x_0 = 0$ называется рядом Маклорена. Студентам потока было предложено задание: построить график заданной элементарной функции, провести ее разложение в ряд Тейлора, построить график данного разложения и проанализировать его в окрестности различных значений переменной. В результате построений данных графиков нужно было убедиться в том, что ряд Маклорена (частный случай ряда Тейлора) и заданная функция в окрестности точки из области сходимости ряда совпадают, а в окрестности точки из области расходимости - отличаются.



а б

Рис. 2. Элементарная функция и ряд Тейлора

На рис. 2 представлена функция $y = \operatorname{arctg} x$ (синяя линия). Красной линией изображен график многочлена $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$, составленного из первых четырех слагаемых ряда Тейлора $y = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. При добавлении слагаемых увеличивается точность приближения графика функции её представлением многочленом. Например, если взять у разложения в ряд Маклорена 36 слагаемых ($n = 36$), то график ряда Тейлора еще точнее будет описывать элементарную функцию в окрестности точки $x_0 = 0$, что можно увидеть на рисунке 2б. Данное задание помогает убедиться в следующих фактах: 1) в области сходимости разложение в ряд Маклорена, действительно, описывает элементарную функцию; 2) значения функции и ряда Маклорена в любой точке из области сходимости «совпадают»; 3) значения функции и ряда Маклорена в любой точке, не принадлежащей области сходимости, значительно отличаются, то есть использовать ряд Маклорена для описания функции нельзя.

Так же в этом разделе было предложено другое задание, которое помогает наглядно понять, что функциональные ряды можно применять для решения множества практических задач. В курсе математического анализа предусмотрена расчетно-графическая работа на разложение в ряд Фурье периодической функции. Чтобы лучше понять, как работает ряд Фурье, предлагалось после получения разложения в своей работе построить график периодической функции и график разложения с различными значениями n [3]. Данные значения показывают количество слагаемых ряда Фурье - чем их больше, тем ближе «ложится» график разложения функции в ряд Фурье к ней самой.

Пример данного задания можно видеть на рис. 3. Здесь оранжевым цветом обозначен график функции

$$y = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad T = 2\pi,$$

а красным, черным, зеленым и синим обозначены разложения данной функции при $n = 1, 3, 10, 34$ соответственно. В результате выполнения РГР было получено разложение в ряд Фурье

$$y = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cdot\cos(nx) - \frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin(nx)\right),$$

включающее в себя тригонометрические функции и свободный член. На данном примере можно наглядно проследить, как сложение тригонометрических членов-слагаемых может дать приближенное описание заданной функции. На рисунке 3 красным цветом построена кривая с уравнением

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{(-1)-1}{\pi}\cdot\cos(x) - (-1)\cdot\sin(nx),$$

что соответствует сумме при $n = 1$. Аналогично получаются суммы для кривых при $n = 3, 10, 34$.

Данное задание можно выполнять в бумажном виде, можно в электронном. Преимущество второго варианта выполнения данной работы заключается в том, что, во-первых, повышается точность построения, во-вторых, можно построить приближение при больших значениях n, при которых лучше видна точность приближения. Также в графическом редакторе можно установить «ползунок», который позволит увидеть анимацию того, как изменяется график при увеличении значения n.

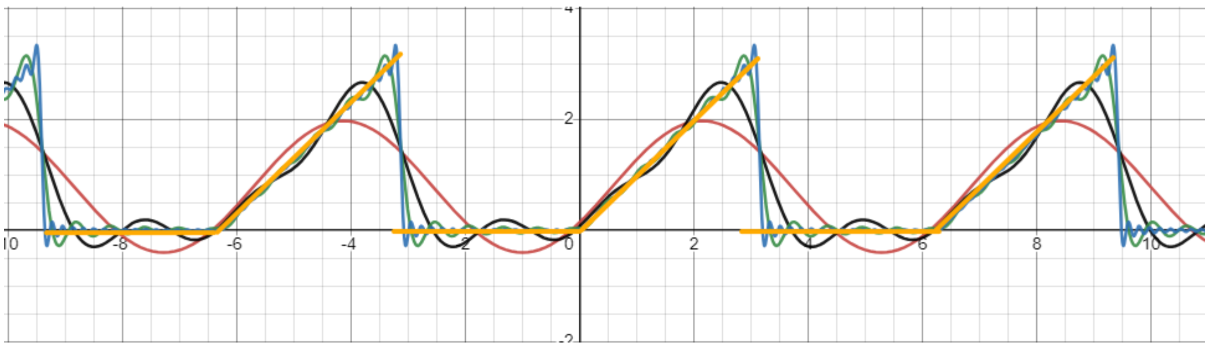


Рис. 3. Приближение функции рядом Фурье

Таким образом, использование наглядных методов в изучении математического анализа не только облегчает усвоение сложных математических понятий, но и помогает понять их более просто, углубить свои знания в данной теме и впоследствии применять знания в практических задачах.

Список литературы:

1. Захарова, Т. Э. Использование минипроектов при изучении математического анализа [Текст] / Т. Э. Захарова // Актуальные вопросы образования. Модель проблемно-ориентированного проектного обучения в современном университете: сб. материалов Международной научно-методической конференции, Новосибирск: СГУГиТ, 2021. Т. 1. С.100-103.

2. Блинова, И. В. Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах [Текст]: учебное пособие / И.В. Блинова, И.Ю. Попов – СПб: Университет ИТМО, 2017 – 56 с.

3. Захарова, Т. Э. Минипроекты в курсе математического анализа [Текст] / Т. Э. Захарова // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. – 2021. – № 9. – С. 54-59.