

УДК: 621. 866. 12/62 – 128.2

621. 8. 028.2

## ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ В ПРЕОБРАЗОВАННОМ ЭЛЛИПСОГРАФЕ

Авров А.С., студент гр. КСс-211, III курс

Научный руководитель: Ермак В. Н., к.т.н., доцент  
Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачёва

**С о с т о я н и е   в о п р о с а .** Из теории механизмов известно, что при решении задач о положениях звеньев механизма возможно точное или только приближённое решение. Причём, выбор возможностей зависит от того, какое звено принято за ведущее. Термин ведущее понимается в данной статье в кинематическом смысле, т. е. как звено с задаваемым положением и движением.

Эллипсографом называют механизм, предназначенный для черчения эллипсов. Считается, что этот механизм изобрёл Архимед (III в. до н. э.). Механизм состоит из неподвижной крестовины 1, шатуна 2 и ползунов 2b, 2d (рис. 1, а).

Преобразованный эллипсограф получен из исходного следующим образом. Во-первых, добавлено звено 4 с ползуном 4e (рис.). Во-вторых, механизм переставлен на добавленное звено. Теперь это звено, как принятое за неподвижное, называется стойкой. В-третьих, полученный механизм поворачивают как единое целое вокруг точки А, доведя поворот до горизонтального или вертикального положения этой стойки. В большинстве публикаций, например [7], останавливаются на горизонтальном положении (рис. 1, в).

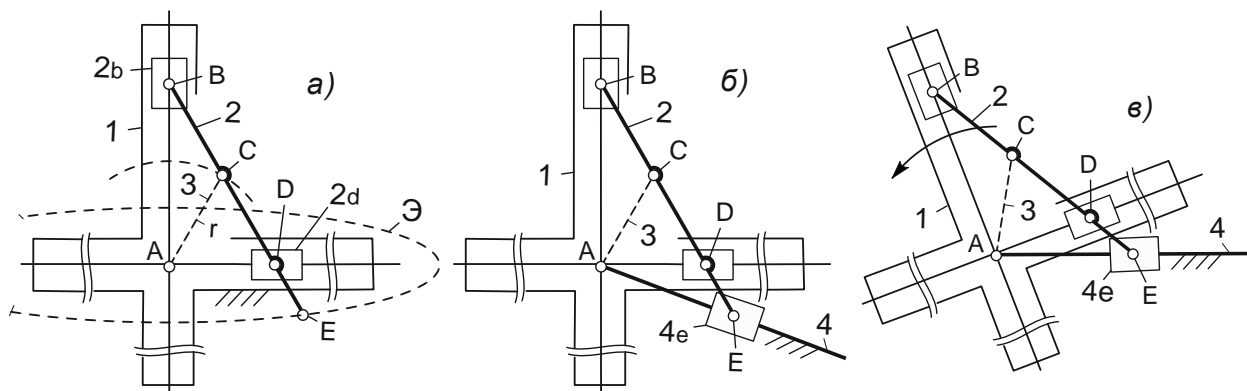


Рис. 1

Данный механизм не является изобретением новейшего времени. Упоминание о нём встречается ещё в [2, с. 67], где он коротко называется механизмом игловодителя (имеется в виду швейной машины).

По классификации И. И. Артоболевского [1, с. 58] «игловодитель» относится к третьему классу. В нём звено 1 – начальное, с задаваемым положением, цепь 2, 3, 2b, 2d – трёхповодковая группа Ассура, группа с определённым положением всех своих звеньев.

Из теории известно, что для механизмов третьего класса, при не особых размерах звеньев, задача об их положениях может быть решена только приближённо, графически или численно. Размеры исследуемого механизма имеют особенность –  $BC=CD=AC$ . Это позволяет предположить, что задача имеет точное решение.

**Решение.** Пробное построение схемы по заданному положению кривошипа показало, что при такой постановке задачи – от кривошипа к крестовине – возможно точное определение положения крестовины относительно стойки 4. А коль это так, то первостепенным становится нахождение положения кривошипа по заданному положению крестовины. Эти положения характеризуются угловыми координатами  $\varphi$  и  $\psi$  (рис. 2).

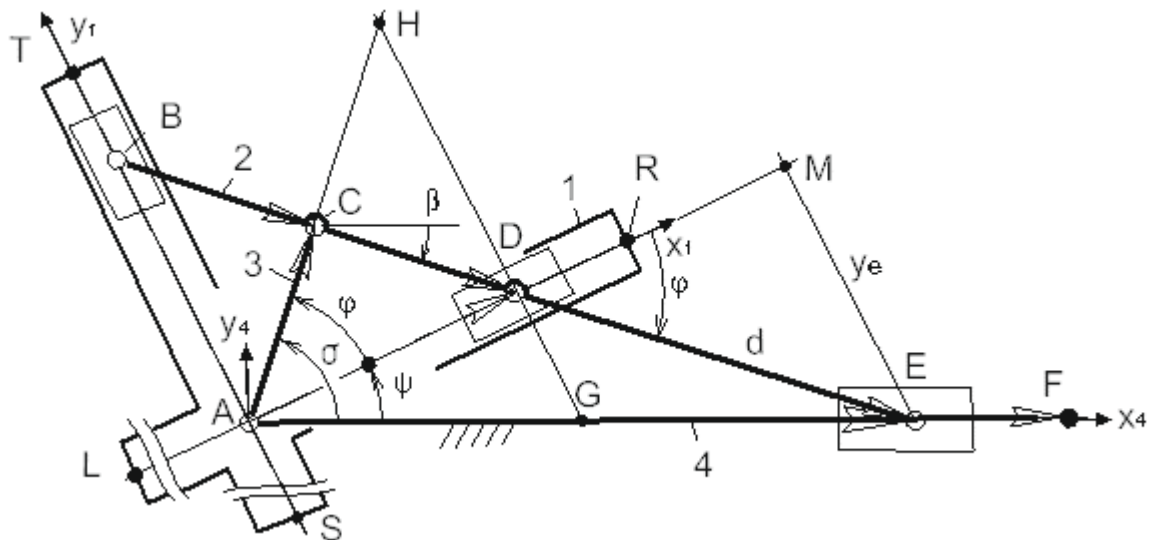


Рис. 2

Обозначим:  $BC=CD=AC=r$ ;  $DE=d$ . Примем:  $d = 2r$ , как на рисунке. В системе  $Ax_1y_1$  (далее – в системе 1):  $y_e = d \sin \varphi$ ;

$$x_e = AM = BE \cos \varphi = (2r + d) \cos \varphi.$$

$$\tan \psi = \frac{y_e}{x_e} = \frac{d \sin \varphi}{(2r+d) \cos \varphi} = \frac{d}{2r+d} \tan \varphi.$$

$$\tan \varphi = \frac{2r+d}{d} \tan \psi.$$

Обозначим:  $\frac{2r+d}{d} = m,$  (1)

тогда:  $\frac{\tan \varphi}{\tan \psi} = m;$  (2)

Теперь мы видим, что наше предположение о возможности точного решения оправдалось. Формула (1) – это начало точного решения.

Как видно по формуле (1), величина  $m$  зависит только от размеров звеньев и, следовательно, является константой, пригодной для анализа любой фазы движения механизма. Покажем сначала применение этой формулы для графического определения угла  $\varphi$

**Графическое определение угла  $\varphi$ .** Через точку  $D$  или другую, лежащую на оси  $x_1$ , проведём перпендикуляр к этой оси. Этот перпендикуляр отсечёт на границах углов  $\varphi$  и  $\psi$  отрезки  $DH$  и  $DG$ .  $DH = AD \tan \varphi$ ;  $DG = AD \tan \psi$ . Их отношение  $\frac{DH}{DG} = \frac{\tan \varphi}{\tan \psi} = m$ . Далее, из точки  $A$  построим произвольно выбранный угол  $\psi$ . На перпендикуляре  $DG$  отложим отрезок  $DH = DG \cdot m$ . Транспортиром измерим получившееся  $\varphi$ . На этом задача графического определения угла  $\varphi$  решена. Решение разработано нами и сделано это впервые.

Графическое решение имеет смысл только для предварительного исследования. Основным является аналитический метод, который рассматривается ниже.

**Аналитическое определение угла  $\varphi$ .** Из (2) следует:

$$\tan \varphi = m \tan \psi; \quad (3)$$

$$\varphi = \text{atan}(m \tan \psi). \quad (4)$$

Углы, входящие в формулу (1), могут достигать  $360^\circ$ , поэтому при определении угла  $\varphi$  придётся воспользоваться арктангенсом двух аргументов. Вычислять будем в среде MatLab с помощью функции  $\text{atan2}(y, x)$  [4, с. 31], где  $y$  и  $x$  есть синус и косинус искомого угла  $\varphi$ . Как следует из (3),

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{m \sin \psi}{\cos \psi}, \quad (5)$$

Истинные значения аргументов  $y$  и  $x$  нам не известны, но это и не важно. Угол  $\varphi$ , вычисленный с помощью функции  $\text{atan2}(y, x)$ , не изменится, если истинные значения синуса и косинуса искомого угла заменить на пропорциональные им значения числителя и знаменателя равенства (5), отсюда:

$$y = m \sin \psi; \quad x = \cos \psi. \quad (6)$$

**Формулы координат шарниров.** Будем считать, что средствами системы MatLab создан массив углов  $\psi$  из некоторого числа элементов. При шаге этого угла в  $5^\circ$  получится 72 элемента. Столь малый шаг нужен для анимации, которая является средством контроля правильности формул и вычислений. Далее, по формуле (4) с помощью функции  $\text{atan2}(y, x)$  создадим массив углов  $\varphi$ . Создадим также массив углов  $\sigma = \psi + \varphi$ . Вывод формул других координат производится методом векторных контуров [5, с. 12], [6, с. 170].

Из векторного контура  $ACE$  найдём и вычислим угол шатуна  $BE$ :

$$\beta = -\text{asin}\left(r \sin \frac{\sigma}{r+d}\right). \quad (7)$$

Проецируя вектор  $AC$  на оси системы 4, получим координаты шарнира  $C$ :

$$x_c = r \cos \sigma; \quad y_c = r \sin \sigma \quad (8)$$

Проецируя векторную цепь  $ACB$  на оси той же системы, получим координаты шарнира  $B$ :

$$x_b = x_c - r \cos \beta; \quad y_b = y_c - r \sin \beta \quad (9)$$

Аналогично, проекции цепи  $ACD$  дают координаты шарнира  $D$ :

$$x_d = x_c + r \cos \beta; \quad y_d = y_c + r \sin \beta. \quad (10)$$

Ниже приведён полный код программы вычислений и построений, включая анимацию. Строки 1 – 20 охватывают вычисления по формулам (1) – (20). Дальнейшее не комментируем, т. к. это относится в основном к организации построений средствами системы MatLab.

#### Код программы вычислений и построений

```

1. r=20; d=4*r; % Длина кривошипа AC и удлинителя DE
2. L=2*r+d; % Полная длина шатуна BE
3. L3=L+r/2; % Длина стойки AF
4. Rk=2.5*r; % Радиус AR креста
5. rsh=0.05*r; % Радиус шарнира
6. Ks=4*rsh; Ls=2*Ks; % Размеры ползуна
7. N=72; h=2*pi/N; % Шаг крестовины - 5 градусов
8. psi=(h:h:N*h)+h/2; % Угол крестовины отн. стойки
9. m=(2*r+d)/d; % m=2, константа tan(fi)/tan(psi)
10. y=m*sin(psi); x=cos(psi); % Аргументы функ. atan2
11. fi=atan2(y,x); % Уг. крив. относит. крест.
12. sigma=psi+fi; % Угол кривошипа относит-но стойки
13. beta=-asin(r*sin(sigma)/(r+d)); % Угол шатуна BE
14. % Коорд. точ. A, B, C, D, E, F, R отн. стойки
15. % R - метка на крестовине
16. z=zeros(1, N); u=ones(1, N); xa=z; ya=u;
17. xc=r*cos(sigma); yc=r*sin(sigma);
18. xb=xc-r*cos(beta); yb=yc-r*sin(beta);
19. xd=xc+r*cos(beta); yd=yc+r*sin(beta);
20. xe=xc+(r+d)*cos(beta); ye=z;
21. xf=L3*u; yf=z;
22. % Коорд. всех четырёх точек креста: R,T,L,S
23. % относит-но собственной системы - x1,y1;
24. % x1 совпадает с AR:
25. xR=Rk; yR=0; xT=0; yT=Rk;
26. xL=-Rk; yL=0; xS=0; yS=-Rk;
27. % Абсолютные коорд. тех же точек:
28. xR=Rk*cos(psi); yR=Rk*sin(psi); % R
29. xT=-Rk*sin(psi); yT=Rk*cos(psi); % T
30. xL=-Rk*cos(psi); yL=-Rk*sin(psi); % L
31. xS=Rk*sin(psi); yS=-Rk*cos(psi); % S
32. % Анимация
33. M=moviein(N); % Резервирование памяти
34. for k=1:N
35. plot([xa(k) xf(k)],[ya(k) yf(k)], 'LineWidth',1) % Стойка AF
36. % Оси крестовины LR и ST:
37. line([xL(k) xR(k)],[yL(k) yR(k)], 'Color', 'Red', 'LineWidth',1) % LR
38. line([xS(k) xT(k)],[yS(k) yT(k)], 'Color', 'Red', 'LineWidth',1) % ST
39. polzun(Ks,Ls,xe(k),ye(k),z) % Ползун [4, с. 28]
    
```

```
40. polzun(Ks,Ls,xd(k),yd(k),psi(k)) % Кулисный камень D
41. polzun(Ks,Ls,xb(k),yb(k),(psi(k)+pi/2)) % Кулисный камень B
42. line([xb(k) xe(k)], [yb(k) ye(k)], 'LineWidth',1) % Шатун BE
43. % Шарниры a, b, d, e
44. circle(rsh,xa(k),ya(k)), circle(rsh,xb(k),yb(k)) % [4, с. 26]
45. circle(rsh,xd(k),yd(k)), circle(rsh,xe(k),ye(k))
46. circle(2*rsh,xR(k),yR(k)), % Метка на крестовине
47. axis([-50 130 -75 75])
48. M(k)=getframe;
49. end
50. movie(M, 2, 12) % Показать M 2 раза с частотой 12 кадров/с.
```

### Список литературы

1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин: / Учеб. для втузов. – М. : Альянс, 2008. – 640 с.
2. Кожевников, С. Н. Теория механизмов и машин: / Учеб. пособие для втузов. – М. :Машиностроение, 1969. – 584 с.
3. Ануфриев, И. Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – СПб. : БХВ-Петербург, 2002. – 736 с. : ил.
4. Matlab. Самоучитель. Практический подход. – СПб.: Наука и техника, 2015. – 448 с.: ил.
5. Ермак, В. Н. Практикум по теории механизмов и машин в среде MatLab : учеб. пособие / Кузбас. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 1999. – 218 с.
6. Ермак, В. Н. Лекции по теории механизмов и машин : учеб. пособие / Кузбас. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 1999. – 218 с.
7. Link – Gear Invertid Ellipsograf Mechanism / You Tube.com