

УДК: 621. 866. 12/62 – 128.2

621. 8. 028.2

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ В ПРЕОБРАЗОВАННОМ ЭЛЛИПСОГРАФЕ

Артамонова А. В., студентка гр. КСс-211, III курс  
 Научный руководитель: Ермак В. Н., к.т.н., доцент  
 Кузбасский государственный технический университет  
 имени Т. Ф. Горбачёва

Эллипсографом называют механизм, с помощью которого можно чертить эллипсы. Считается, что его изобрёл Архимед (III в. до н. э.). Механизм состоит из неподвижной крестовины 1, шатуна 2 и ползунов 2b, 2d (рис. 1).

На шатуне выделяют базовую или основную часть  $BD$  и дополнительную  $DE$ , лежащую, в нашем случае, на продолжении  $BD$ . Середина  $C$  базовой части движется по окружности радиуса  $r$ , остальные движутся по эллиптическим траекториям, отсюда и происходит название механизма. На рисунке показан эллипс Э, описываемый точкой  $E$ . Окружность, описываемая точкой  $C$ , позволяет дополнить механизм кривошипом 3, который полезен при выводе формул и может быть полезен практически.

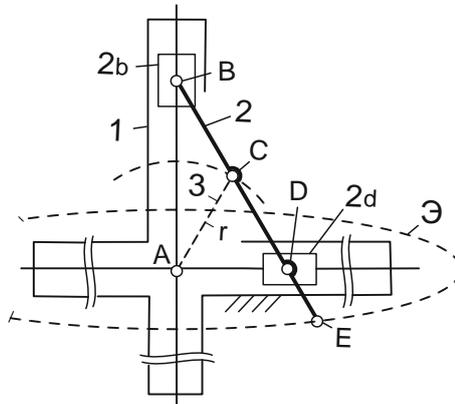


Рис. 1

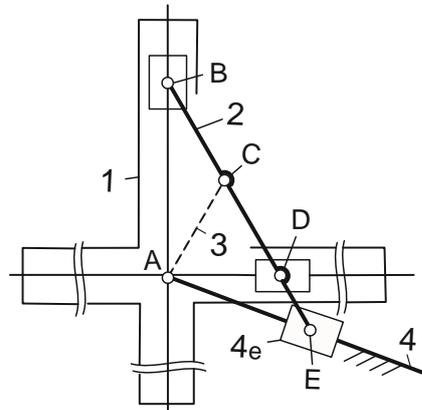


Рис. 2

Преобразованный эллипсограф получен из исходного следующим образом. Во-первых, добавлено звено 4 с ползуном 4e (рис. 2). Во-вторых, механизм переставлен на добавленное звено. В-третьих, полученный механизм поворачивают как единое целое вокруг точки  $A$ , доведя поворот до горизонтального или вертикального положения добавленного звена. В большинстве публикаций, например [4], останавливаются на горизонтальном положении (рис. 3).

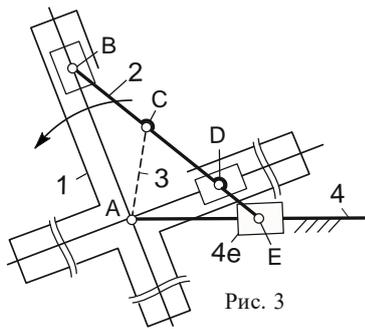


Рис. 3

После указанных преобразований ведущим звеном сделали крестовину, которая вращается вокруг точки  $A$  с постоянной скоростью, как это обычно принято при кинематическом анализе. Направление вращения – против часовой стрелки.

#### Постановка задачи

В найденных нами публикациях приводятся только видеоролики с картинкой движения звеньев. Предположительно они сделаны с помощью профессиональных средств анимации. Однако в учебном процессе важен не результат, а способ его получения, поэтому мы решили получить этот результат методами теории механизмов [2, 3].

Для анимации необходимо уметь строить схему механизма по заданному положению одного из его звеньев, в данном случае – крестовины. Несложно построить эту схему по заданному положению кривошипа. Однако после смены ведущего звена – вместо кривошипа крестовина – задачу приходится решать численным методом.

#### Решение задачи

Для решения задачи изобразим схему механизма в некотором не особом положении, удлинив добавленную часть  $DE$  так, чтобы при воображаемой работе механизма крестовина не сталкивалась с ползуном  $4e$  (рис. 4).

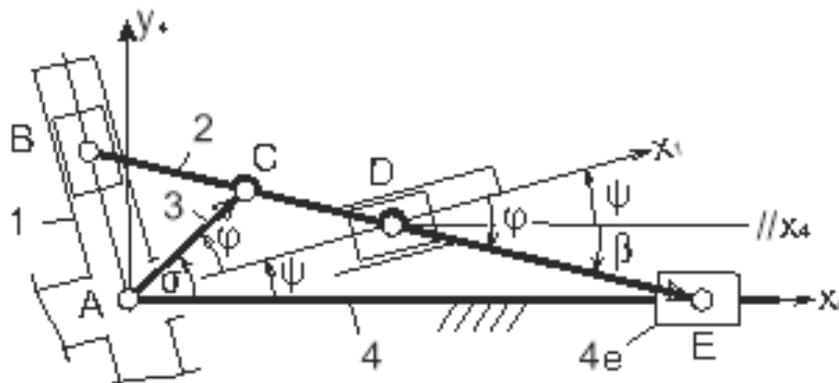


Рис. 4

Размеры звеньев механизма:  $BC = CD = AC = r = 20$  мм;  $DE = d = 2r$ ;  $CE = 3r$ . На рисунке координата крестовины  $\psi = 15^\circ = \pi/12$  рад.

Выведем уравнение, связывающее координату  $\varphi$  кривошипа с координатой  $\psi$  крестовины (см. углы, построенные из точки  $A$ ). Для вывода потребуются углы  $\sigma, \beta$  векторов  $\overline{AC}$  и  $\overline{CE}$  относительно оси  $x_4$ . Как видно по рисунку,

$$\sigma = \psi + \varphi, \quad (1)$$

$$\beta = \psi - \varphi. \quad (2)$$

Чтобы установить связь между всеми углами, входящими в формулу (2), они были построены из единого центра  $D$ . Проекция векторов  $\overline{AC}$  и  $\overline{CE}$  на ось

$y_4$  равны друг другу и противоположны по знаку. На этом основании получаем:  $AC \cdot \sin \sigma + CE \cdot \sin \beta = 0$ . После подстановок уравнение (2) принимает вид

$$AC \cdot \sin(\psi + \varphi) + CE \cdot \sin(\psi - \varphi) = 0 \quad (3)$$

Координата  $\varphi$  является корнем данного уравнения. Найдём эту координату с помощью функции `fzero`, входящей в состав вычислительной системы `MatLab` [1, с. 179]. Применительно к нашей задаче и вычислению корня для положения механизма, показанного на рисунке, эта функция имеет вид:

$$f1=fzero('20*\sin(\pi/12+x)+60*\sin(\pi/12-x)', [0 \pi/2]).$$

Слева от знака равенства стоит придуманное нами имя переменной, в которую заносится численное значение корня уравнения. Справа, сразу после знака равенства, стоит имя функции. В скобках и апострофах приведено уравнение (3), в которое подставлены численные значения всех входящих в него величин – кроме  $\varphi$ . Под знаком синуса приведено значение координаты  $\psi$  ( $\pi/12$ ) для исследуемого положения механизма. На втором месте должно быть  $\varphi$ , но по правилам оформления функции `fzero` оно обозначено буквой  $x$ . В квадратных скобках стоит диапазон координаты  $\varphi$ , в котором предположительно находится искомый корень. В данном примере это угол от нуля до  $\pi/2$ .

Для каждой новой фазы движения механизма уравнение составляют и решают заново. Это большой недостаток функции `fzero`. Даже при широком шаге вычислений, равном, например, 15 градусам, пришлось бы писать и решать уравнение  $360/15=24$  раза. Однако эллипс фигура симметричная, разделяющаяся на четыре однотипных сегмента, и это позволяет сократить вычисления во столько же раз. Достаточно задать координату  $\psi$  в диапазоне от нуля до  $\pi/2$  и вычислить соответствующую координату  $\varphi$ , чтобы затем программными средствами распространить вычисленное на оставшиеся три сегмента. Вот как выглядит код этого распространения.

```

1  f1=fzero('20*sin(pi/12+x)+60*sin(pi/12-x)', [0 pi/2]);
2  f2=fzero('20*sin(2*pi/12+x)+60*sin(2*pi/12-x)', [0 pi/2]);
3  f3=fzero('20*sin(3*pi/12+x)+60*sin(3*pi/12-x)', [0 pi/2]);
4  f4=fzero('20*sin(4*pi/12+x)+60*sin(4*pi/12-x)', [0 pi/2]);
5  f5=fzero('20*sin(5*pi/12+x)+60*sin(5*pi/12-x)', [0 pi/2]);
6  f6=pi/2; % Приводится без формулы ввиду очевидности
9  q1=[f1, f2, f3, f4, f5, f6]; 10 q2=pi-[f5, f4, f3, f2, f1, 0];
10 q12=[q1 q2]; % Объединён. массив fi для четвертей 1 и 2
11 q14=[q12, q12+pi]; % Массив fi для всех 4-х четвертей
12 ps14=(1:nt)*h; % Массив psi для всех 4-х четвертей
13 rg=180/pi; % Преобразователь рад в грд (=57 грд)
14 q14d=q14*rg; % Преобразование в градусы
15 ps14d=ps14*rg; % Преобразование в градусы
16 q12d=q12*rg; ps14d=ps14*rg; % fi и psi в градусах
17 num=1:nt; % Номер координат fi и psi

```

Результаты вычислений и преобразований приведены в табл. 1.

Таблица 1. Координаты кривошипа и крестовины

num	fid	psid	num	fid	psid
1.0000	28.1868	15.0000	13.0000	208.1868	195.0000
2.0000	49.1066	30.0000	14.0000	229.1066	210.0000
3.0000	63.4349	45.0000	15.0000	243.4349	225.0000
4.0000	73.8979	60.0000	16.0000	253.8979	240.0000
5.0000	82.3693	75.0000	17.0000	262.3693	255.0000
6.0000	90.0000	90.0000	18.0000	270.0000	270.0000
7.0000	97.6307	105.0000	19.0000	277.6307	285.0000
8.0000	106.1021	120.0000	20.0000	286.1021	300.0000
9.0000	116.5651	135.0000	21.0000	296.5651	315.0000
10.0000	130.8934	150.0000	22.0000	310.8934	330.0000
11.0000	151.8132	165.0000	23.0000	331.8132	345.0000
12.0000	180.0000	180.0000	24.0000	360.0000	360.0000

Эти же результаты представлены также в виде графиков (рис. 5).

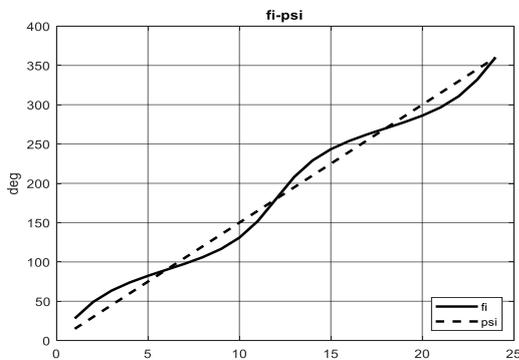


Рис. 5. Графики углов  $\varphi$  и  $\psi$ . По горизонтали – номер положения механизма, по вертикали – углы в градусах. Сплошная линия изображает угол  $\varphi$ , пунктирная –  $\psi$ . Положение 24 соответствует полному обороту крестовины

По графикам видно, что разность  $\varphi - \psi$  периодически меняет свой знак. Это указывает на то, что кривошип вращается неравномерно.

На рис. 5 механизм изображён при прохождении четвёртой четверти оборота крестовины. Кривошип 3, напомним, и крестовина 1 вращаются против часовой стрелки, на это указывает угловая скорость  $\omega_1$ . Кривошип расположен сзади плеча  $R$  крестовины, т. е. отстаёт от неё. На рис. 6 кривошип расположен впереди того же плеча и, следовательно опережает крестовину. Так происходит при переходе из одной четверти, в другую, что и показывает график.

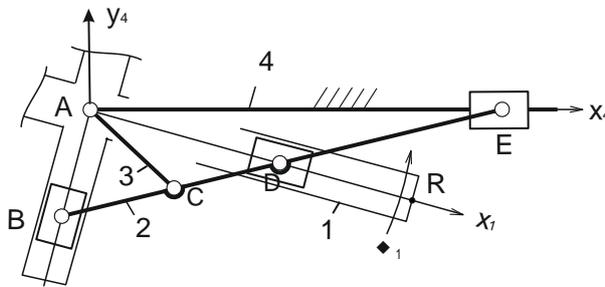


Рис. 5

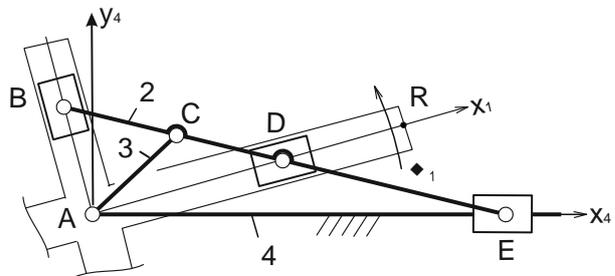


Рис. 6

На этом заканчивается первая и самая сложная часть решения задачи – вычисление угла  $\varphi$ . Во второй части выводятся формулы координат всех шарниров. Результаты вывода приведены в табл. 2.

Таблица 2. Формулы координат всех шарниров

$x_c = AC \cdot \cos \sigma;$	$x_b = x_c - r \cdot \cos \beta;$
$y_c = AC \cdot \sin \sigma.$	$y_b = y_c - r \cdot \sin \beta.$
$x_d = x_c + r \cdot \cos \beta$	$x_e = x_c + (r + d) \cdot \cos \beta;$
$y_d = y_c + r \cdot \sin \beta$	$y_e = 0.$

Код программы построения схемы и её анимации.

```
r=40; d=4*r; % Длина кривошипа AC и удлинителя DE
L=2*r+d; % Полная длина шатуна BE; L3=L+r/2; % Длина стойки AF; Rk=2.5*r; % Радиус AR
креста
rsh=0.05*r; % Радиус шарнира; Ks=4*rsh; Ls=2*Ks; % Размеры ползуна; n=72; h=2*pi/n;
% Шаг крестовины - 15 градусов;
% Углы psi, fi и beta вычислены выше
sigma=psi+fi; % Угол кривошипа относит-но стойки
% Коорд. точ. A, B, C, D, E, F, R относительно стойки
% R - метка на крестовине
z=zeros(1, n); u=ones(1, n); xa=z; ya=u;
xc=r*cos(sigma); yc=r*sin(sigma); xb=xc-r*cos(beta); yb=yc-r*sin(beta);
xd=xc+r*cos(beta); yd=yc+r*sin(beta); xe=xc+(r+d)*cos(beta); ye=z;
xf=L3*u; yf=z;
% Коорд. всех четырёх точек креста: R,T,L,S относит-но системы x1,y1;
xRr=Rk; yRr=0; xTr=0; yTr=Rk; xLr=-Rk; yLr=0; xSr=0; ySr=-Rk;
% Абсолютные коорд. тех же точек:
xR=Rk*cos(psi); yR=Rk*sin(psi); xT=-Rk*sin(psi); yT=Rk*cos(psi);
xL=-Rk*cos(psi); yL=-Rk*sin(psi); xS=Rk*sin(psi); yS=-Rk*cos(psi);

% Анимация
M=moviein(n); % Резервирование памяти
for k=1:n
    plot([xa(k) xf(k)], [ya(k) yf(k)], 'LineWidth', 1) % Стойка AF
    % Оси крестовины LR и ST:
    line([xL(k) xR(k)], [yL(k) yR(k)], 'Color', 'Red', 'LineWidth', 1) % LR
    line([xS(k) xT(k)], [yS(k) yT(k)], 'Color', 'Red', 'LineWidth', 1) % ST
    polzun(Ks, Ls, xe(k), ye(k), z) % Ползун
    polzun(Ks, Ls, xd(k), yd(k), psi(k)) % Кулисный камень D
    polzun(Ks, Ls, xb(k), yb(k), (psi(k)+pi/2)) % Кулисный камень B
    line([xb(k) xe(k)], [yb(k) ye(k)], 'LineWidth', 1) % Шатун BE
    % Шарниры a, b, d, e
    circle(rsh, xa(k), ya(k)), circle(rsh, xb(k), yb(k))
    circle(rsh, xd(k), yd(k)), circle(rsh, xe(k), ye(k))
    circle(2*rsh, xR(k), yR(k)), % Метка на крестовине
    axis([-100 260 -150 150])
    M(k)=getframe;
end
movie(M, 2, 12) % Показать M 2 раза с частотой 12 кадров/с.
```

## Заключение

Исследована кинематика сложного рычажного механизма, опубликованного в виде видеоролика в интернете на канале You Tube. Воспроизведена его анимация аналитическими методами. В результате исследования докладчик освоил аналитический и численный методы кинематического анализа механизмов. Освоил программирование в системе MatLab. Всё перечисленное практически не изучается в учебных курсах. Доступная литература по теме исследования – иностранная и носит рекламный характер, поэтому пришлось преодолеть немалые трудности.

## Список литературы

1. Ануфриев, И. Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – СПб. : БХВ-Петербург, 2002. – 736 с. : ил.
2. Ермак, В. Н. Практикум по теории механизмов и машин в среде MatLab : учеб. пособие / Кузбас. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 1999. – 218 с.
3. Ермак, В. Н. Лекции по теории механизмов и машин : учеб. пособие / В. Н. Ермак ; Кузбас. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 2009. – 86 с.
4. Link – Gear Invertid Ellipsograf Mechanism / You Tube.com