УДК 378

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева,
г. Кемерово

В предлагаемой статье описывается достаточно универсальная идея доказательства утверждений и соотношений, базирующаяся на принципе математической индукции, из которого следуют два главных шага данного метода. Они таковы:

1. убедимся, что исследуемое соотношение имеет место при начальном значении некоторого значения показателя (принимающего целочисленного значения);

2. проверяем, что из гипотезы его истинности при некотором произвольном значении данного показателя вытекает его истинность для следующего значения; это и доказывает его выполнение при любом значении данного показателя.

Рассмотрим этот подход на примере доказательства утверждений (отличающихся от равенств и неравенств), показывая для наглядности отмеченные пп. 1 и 2 метода математической индукции. Необходимо отметить, что при использовании указанного метода важно связать доказываемое утверждение при произвольном значении индекса (принимающего целые значения) с этим же утверждением для следующего значения этого индекса.

Задача 1.

Доказать, что члены последовательности

$$a_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}; a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; n = 1, ..., m, \tag{1}$$

где

$$a_n \text{ – это целые положительные числа.} \tag{2}$$

Доказательство:

Проведем доказательство индукцией по индексу n в соотношении (1), разбив его на следующие шаги:

1. при $n=1$, подставляя выражения $a_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}; a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, получим, что

$$a_1 = \frac{a-b}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 > 0$$

является целым положительным числом, то есть легко видеть, что доказываемое утверждение, является истинным.

2. Допустим, что утверждение верно при всех $k = 1, ..., n$

$a_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} > 0$ целое число, тогда имеет место следующая цепочка выкладок:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1\right]}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{5-1}{2^2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1-5}{2^2}\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}=a_{n-1}$$

В итоге получили рекуррентную формулу

$$a_{n+1}=a_{n-1}+a_n, n=2,3,... \qquad (3)$$

это – разностное уравнение второго порядка, определяющее возвратную последовательность. Так как по предположению $a_k>0$ – целое, для любого $k=1,...,n$, то, в частности при $k=n-1$ и $k=n$, a_{n-1} и a_n – также являются целыми неотрицательными числами.

Поэтому из соотношения (3) следует, что a_{n+1} также целое неотрицательное число, а значит утверждение доказано.

Следовательно, утверждение (2) справедливо и при $n+1$, а значит, по математической индукции следует, что оно справедливо для любого $\forall n=0,1,...$

Заметим, что последовательность, задаваемая формулой (3), называется числами Фибоначчи по имени известного математика Средневековья Леонардо Пизанского. Таким образом, числа Фибоначчи можно задавать двумя способами – по формуле (1) либо с помощью разностного уравнения вида (3). Кроме того, следует отметить, что, наоборот, решая разностное уравнение второго порядка (3), получим выражение (1). Парадокс формулы (1), в которую включены иррациональные числа a, b, состоит в том, что при целых положительных n она приводит лишь к целым положительным числам. Этот парадокс объясняется тем, что при возведении чисел a, b в целую степень с использованием бинома Ньютона рациональные слагаемые сокращаются, а выражения, содержащие иррациональность $\sqrt{5}$, сокращаются на $\sqrt{5}$ по формуле (1) для числа a_n.

Опыт изложения метода математической индукции в общеобразовательной школе невелик. Его изучение часто связывают с рассмотрением случаев, когда одно из условий аксиомы индукции не выполняется, и выяснением того, какие при этом получаются неправильные выводы; с рассмотрением аналогов аксиомы индукции; с решением большого числа довольно сложных тождеств или неравенств. Однако это возможно лишь на внеклассных и факультативных занятиях или в классах с углубленным изучением математики, но не в массовой школе. В общеобразовательном классе необходимо дать самое главное – научить учащихся пользоваться методом математической индукции.

Список литературы:

1. А.Н. Колмогоров. Научно-методический журнал «Математика в школе». Статья «Алгебра и начала анализа. Метод математической индукции (стр.8)». №1, 1975.

2. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности.– М.: Наука, 1983.– 48 с.