

УДК 51-77

СОЗДАНИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ СТАВОК ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО И КОММЕРЧЕСКОГО БАНКОВ

Кузнецова А.В., к.т.н., доцент
 Безденежных И.В., студент гр. ИБс-211, II курс
 Евдокимов И.В., студент гр. ИБс-211, II курс
 Кузбасский государственный технический университет
 имени Т.Ф. Горбачева,
 г. Кемерово

В работе будет рассмотрена игра 2-х лиц в нормальной форме [1, 2]:

$$\Gamma = \{X, Y, F(x, y), G(x, y)\}, \quad (1)$$

где X, Y – множества стратегий первого и второго игроков соответственно (центральный и коммерческий банк), где; $F(x, y)$, $G(x, y)$ – функции выигрыша игроков, причем F, G – непрерывные функции.

Нахождение оптимально допустимой ключевой и кредитной ставок Центрального и коммерческого банков можно реализовать с помощью решения иерархической игры (1): игрок под номером 1 выбирает стратегию $x \in X$ и сообщает ее игроку под номером 2. Затем игрок 2 выбирает стратегию $y \in Y$, зная x . Схематичная запись передачи информации будет выглядеть следующим образом: $x \rightarrow y$.

Для решения задачи на оптимизацию ключевой и кредитной ставок предлагается следующая математическая модель. Пусть игрок 1 – Центробанк, игрок 2 – коммерческий банк, который даёт кредиты людям. Можно предположить, что объем кредита зависит исключительно от процентных ставок банков (ω), удовлетворяющих условию $0 < \omega < 1$.

В свою очередь, издержки банка с каждого выданного ими кредита равны $z(\omega)$:

$$z(\omega) = a - b\omega,$$

где a и b – положительные числа.

До выдачи кредита населению банку нужно взять кредит у Центробанка под ключевую ставку $0 < \eta < 1$. 0 , которую он же и устанавливает.

Основная цель Центробанка – максимизировать доход от выданных кредитов банкам, то есть максимизировать величину 2:

$$F(\eta, \omega) = \eta \cdot z(\omega) = \eta(a - b\omega) \quad (2)$$

Основная цель коммерческих банков – максимизировать прибыль от выданного кредита, то есть максимизировать величину 3:

$$G(\eta, \omega) = (\omega - \eta - c)(a - b\omega) \quad (3)$$

Выражения (2), (3) определяют функции выигрыша игроков в игре (1). Рассмотрим ее решение в стратегиях. Первый ход представляет из себя уст-

новку ключевой ставки η Центробанком, затем коммерческий банк, зная ключевую ставку, устанавливает процентную ставку ω .

Исследуем функцию $G(\eta, \omega)$. Найдем стационарные точки, для этого найдем частные производные функции:

$$\frac{\partial G}{\partial \omega} = a - 2b\omega + b\eta + bc = 0; \quad \omega = \frac{a + b\eta + bc}{2b} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \eta + c \right). \quad (4)$$

Вычислим вторую производную по ω :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \omega^2} = -2b < 0.$$

Так как вторая производная отрицательна, становится ясно, что в стационарной точке функция имеет локальный максимум, который на самом деле является и глобальным максимумом.

Полученная на выходе стратегия коммерческого банка (4)
 $\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \eta + c \right)$, по сути, является оптимальным ответом на выбор игрока

номер 1, так как именно в этой точке функция выигрыша игрока номер 2 принимает наибольшее значение. Далее необходимо изучить функцию выигрыша Центробанка, подставив оптимальную стратегию игрока номер 2:

$$F(\eta, \omega) = \eta \cdot z(\omega) = \eta(a - b\omega) = \eta \left(a - b \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \eta + c \right) \right) = \eta \left(a - \frac{1}{2} (a - b\eta - bc) \right) = \\ = \frac{\eta}{2} (a - bc - b\eta) = F(\eta) \quad (5)$$

Найдем частную производную для функции (5) по переменной η :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (a - 2bc - b\eta) = 0; \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - c \right). \quad (6)$$

Аналогично вычислим вторую производную по η :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = -2b < 0.$$

Становится ясно, стратегия (6) $\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - c \right)$ является оптимальной, так

как в этой точке функция F имеет наибольшее значение.

Следующим шагом является построение компьютерной модели игры и сравнение значений оптимальных стратегий с полученными по формулам выше. Введем необходимые параметры (рисунок 1). Будем считать, что коэффициенты a и b измеряются в млн. рублей. Также укажем верхнее и нижнее значение ставок Центрального и коммерческого банков.

$a =$	100	$\omega_{\text{ниж}} =$	0,05
$b =$	700	$\omega_{\text{верх}} =$	0,15
$c =$	0,03	$\eta_{\text{ниж}} =$	0,01
		$\eta_{\text{верх}} =$	0,1

Рисунок 1. Значение параметров модели.

Составим таблицу значений (выигрышей) для каждого игрока (рисунки 2, 3)

Таблица выигрышей Коммерческого банка (Матрица В)											
$\eta \backslash \omega$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
0,01	0,650	1,160	1,530	1,760	1,850	1,800	1,610	1,280	0,810	0,200	-0,550
0,015	0,325	0,870	1,275	1,540	1,665	1,650	1,495	1,200	0,765	0,190	-0,525
0,02	0,000	0,580	1,020	1,320	1,480	1,500	1,380	1,120	0,720	0,180	-0,500
0,025	-0,325	0,290	0,765	1,100	1,295	1,350	1,265	1,040	0,675	0,170	-0,475
0,03	-0,650	0,000	0,510	0,880	1,110	1,200	1,150	0,960	0,630	0,160	-0,450
0,035	-0,975	-0,290	0,255	0,660	0,925	1,050	1,035	0,880	0,585	0,150	-0,425
0,04	-1,300	-0,580	0,000	0,440	0,740	0,900	0,920	0,800	0,540	0,140	-0,400
0,045	-1,625	-0,870	-0,255	0,220	0,555	0,750	0,805	0,720	0,495	0,130	-0,375
0,05	-1,950	-1,160	-0,510	0,000	0,370	0,600	0,690	0,640	0,450	0,120	-0,350
0,055	-2,275	-1,450	-0,765	-0,220	0,185	0,450	0,575	0,560	0,405	0,110	-0,325
0,06	-2,600	-1,740	-1,020	-0,440	0,000	0,300	0,460	0,480	0,360	0,100	-0,300
0,065	-2,925	-2,030	-1,275	-0,660	-0,185	0,150	0,345	0,400	0,315	0,090	-0,275
0,07	-3,250	-2,320	-1,530	-0,880	-0,370	0,000	0,230	0,320	0,270	0,080	-0,250
0,075	-3,575	-2,610	-1,785	-1,100	-0,555	-0,150	0,115	0,240	0,225	0,070	-0,225
0,08	-3,900	-2,900	-2,040	-1,320	-0,740	-0,300	0,000	0,160	0,180	0,060	-0,200
0,085	-4,225	-3,190	-2,295	-1,540	-0,925	-0,450	-0,115	0,080	0,135	0,050	-0,175
0,09	-4,550	-3,480	-2,550	-1,760	-1,110	-0,600	-0,230	0,000	0,090	0,040	-0,150
0,095	-4,875	-3,770	-2,805	-1,980	-1,295	-0,750	-0,345	-0,080	0,045	0,030	-0,125
0,1	-5,200	-4,060	-3,060	-2,200	-1,480	-0,900	-0,460	-0,160	0,000	0,020	-0,100

Рисунок 2. Таблица выигрышей второго игрока

Таблица выигрышей Центрального банка (Матрица А)											
$\eta \backslash \omega$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
0,01	0,650	0,580	0,510	0,440	0,370	0,300	0,230	0,160	0,090	0,020	-0,050
0,015	0,975	0,870	0,765	0,660	0,555	0,450	0,345	0,240	0,135	0,030	-0,075
0,02	1,300	1,160	1,020	0,880	0,740	0,600	0,460	0,320	0,180	0,040	-0,100
0,025	1,625	1,450	1,275	1,100	0,925	0,750	0,575	0,400	0,225	0,050	-0,125
0,03	1,950	1,740	1,530	1,320	1,110	0,900	0,690	0,480	0,270	0,060	-0,150
0,035	2,275	2,030	1,785	1,540	1,295	1,050	0,805	0,560	0,315	0,070	-0,175
0,04	2,600	2,320	2,040	1,760	1,480	1,200	0,920	0,640	0,360	0,080	-0,200
0,045	2,925	2,610	2,295	1,980	1,665	1,350	1,035	0,720	0,405	0,090	-0,225
0,05	3,250	2,900	2,550	2,200	1,850	1,500	1,150	0,800	0,450	0,100	-0,250
0,055	3,575	3,190	2,805	2,420	2,035	1,650	1,265	0,880	0,495	0,110	-0,275
0,06	3,900	3,480	3,060	2,640	2,220	1,800	1,380	0,960	0,540	0,120	-0,300
0,065	4,225	3,770	3,315	2,860	2,405	1,950	1,495	1,040	0,585	0,130	-0,325
0,07	4,550	4,060	3,570	3,080	2,590	2,100	1,610	1,120	0,630	0,140	-0,350
0,075	4,875	4,350	3,825	3,300	2,775	2,250	1,725	1,200	0,675	0,150	-0,375
0,08	5,200	4,640	4,080	3,520	2,960	2,400	1,840	1,280	0,720	0,160	-0,400
0,085	5,525	4,930	4,335	3,740	3,145	2,550	1,955	1,360	0,765	0,170	-0,425
0,09	5,850	5,220	4,590	3,960	3,330	2,700	2,070	1,440	0,810	0,180	-0,450
0,095	6,175	5,510	4,845	4,180	3,515	2,850	2,185	1,520	0,855	0,190	-0,475
0,1	6,500	5,800	5,100	4,400	3,700	3,000	2,300	1,600	0,900	0,200	-0,500

Рисунок 3. Таблица выигрышей первого игрока

Теоретико-игровой анализ предполагает, что каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш. Для этого мы выделили максимальный выигрыш второго игрока при фиксированной стратегии первого игрока в табли-

це (см. рисунок 4). Затем мы выделили те выигрыши в таблице первого игрока, которые Центральный банк получит, если первый игрок будет выбирать из множества наилучших ответов второго игрока (см. рисунок 5). Максимальный выигрыш первого игрока из множества наилучших ответов второго игрока был обозначен красным цветом.

Таблица выигрышей Коммерческого банка (Матрица В)												
$\eta \backslash \omega$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	Max
0,01	0,650	1,160	1,530	1,760	1,850	1,800	1,610	1,280	0,810	0,200	-0,550	1,850
0,015	0,325	0,870	1,275	1,540	1,665	1,650	1,495	1,200	0,765	0,190	-0,525	1,665
0,02	0,000	0,580	1,020	1,320	1,480	1,500	1,380	1,120	0,720	0,180	-0,500	1,500
0,025	-0,325	0,290	0,765	1,100	1,295	1,350	1,265	1,040	0,675	0,170	-0,475	1,350
0,03	-0,650	0,000	0,510	0,880	1,110	1,200	1,150	0,960	0,630	0,160	-0,450	1,200
0,035	-0,975	-0,290	0,255	0,660	0,925	1,050	1,035	0,880	0,585	0,150	-0,425	1,050
0,04	-1,300	-0,580	0,000	0,440	0,740	0,900	0,920	0,800	0,540	0,140	-0,400	0,920
0,045	-1,625	-0,870	-0,255	0,220	0,555	0,750	0,805	0,720	0,495	0,130	-0,375	0,805
0,05	-1,950	-1,160	-0,510	0,000	0,370	0,600	0,690	0,640	0,450	0,120	-0,350	0,690
0,055	-2,275	-1,450	-0,765	-0,220	0,185	0,450	0,575	0,560	0,405	0,110	-0,325	0,575
0,06	-2,600	-1,740	-1,020	-0,440	0,000	0,300	0,460	0,480	0,360	0,100	-0,300	0,480
0,065	-2,925	-2,030	-1,275	-0,660	-0,185	0,150	0,345	0,400	0,315	0,090	-0,275	0,400
0,07	-3,250	-2,320	-1,530	-0,880	-0,370	0,000	0,230	0,320	0,270	0,080	-0,250	0,320
0,075	-3,575	-2,610	-1,785	-1,100	-0,555	-0,150	0,115	0,240	0,225	0,070	-0,225	0,240
0,08	-3,900	-2,900	-2,040	-1,320	-0,740	-0,300	0,000	0,160	0,180	0,060	-0,200	0,180
0,085	-4,225	-3,190	-2,295	-1,540	-0,925	-0,450	-0,115	0,080	0,135	0,050	-0,175	0,135
0,09	-4,550	-3,480	-2,550	-1,760	-1,110	-0,600	-0,230	0,000	0,090	0,040	-0,150	0,090
0,095	-4,875	-3,770	-2,805	-1,980	-1,295	-0,750	-0,345	-0,080	0,045	0,030	-0,125	0,045
0,1	-5,200	-4,060	-3,060	-2,200	-1,480	-0,900	-0,460	-0,160	0,000	0,020	-0,100	0,020

Рисунок 4. Множество благоприятных значений выигрыша второго игрока

Таблица выигрышей Центрального банка (Матрица А)												
$\eta \backslash \omega$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	Max
0,01	0,650	0,580	0,510	0,440	0,370	0,300	0,230	0,160	0,090	0,020	-0,050	0,37
0,015	0,975	0,870	0,765	0,660	0,555	0,450	0,345	0,240	0,135	0,030	-0,075	0,555
0,02	1,300	1,160	1,020	0,880	0,740	0,600	0,460	0,320	0,180	0,040	-0,100	0,6
0,025	1,625	1,450	1,275	1,100	0,925	0,750	0,575	0,400	0,225	0,050	-0,125	0,75
0,03	1,950	1,740	1,530	1,320	1,110	0,900	0,690	0,480	0,270	0,060	-0,150	0,9
0,035	2,275	2,030	1,785	1,540	1,295	1,050	0,805	0,560	0,315	0,070	-0,175	1,05
0,04	2,600	2,320	2,040	1,760	1,480	1,200	0,920	0,640	0,360	0,080	-0,200	0,92
0,045	2,925	2,610	2,295	1,980	1,665	1,350	1,035	0,720	0,405	0,090	-0,225	1,035
0,05	3,250	2,900	2,550	2,200	1,850	1,500	1,150	0,800	0,450	0,100	-0,250	1,15
0,055	3,575	3,190	2,805	2,420	2,035	1,650	1,265	0,880	0,495	0,110	-0,275	1,265
0,06	3,900	3,480	3,060	2,640	2,220	1,800	1,380	0,960	0,540	0,120	-0,300	0,96
0,065	4,225	3,770	3,315	2,860	2,405	1,950	1,495	1,040	0,585	0,130	-0,325	1,04
0,07	4,550	4,060	3,570	3,080	2,590	2,100	1,610	1,120	0,630	0,140	-0,350	1,12
0,075	4,875	4,350	3,825	3,300	2,775	2,250	1,725	1,200	0,675	0,150	-0,375	1,2
0,08	5,200	4,640	4,080	3,520	2,960	2,400	1,840	1,280	0,720	0,160	-0,400	0,72
0,085	5,525	4,930	4,335	3,740	3,145	2,550	1,955	1,360	0,765	0,170	-0,425	0,765
0,09	5,850	5,220	4,590	3,960	3,330	2,700	2,070	1,440	0,810	0,180	-0,450	0,81
0,095	6,175	5,510	4,845	4,180	3,515	2,850	2,185	1,520	0,855	0,190	-0,475	0,855
0,1	6,500	5,800	5,100	4,400	3,700	3,000	2,300	1,600	0,900	0,200	-0,500	0,2

Рисунок 5. Выигрыши первого игрока из множества благоприятных для второго игрока

Значение максимального выигрыша первого игрока из множества наилучших ответов второго игрока равно 1,265 млн. рублей, как показано на рисунке 5. Оптимальные стратегии для первого игрока и второго игрока соответственно – $\eta = 0,055$ (5,5%) и $\omega = 0,11$ (11%). Выигрыш второго игрока составит 0,575 млн. рублей, исходя из таблицы (см. рисунок 6).

Таблица выигрышей Коммерческого банка (Матрица В)												
$\eta \backslash \omega$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	Max
0,01	0,650	1,160	1,530	1,760	1,850	1,800	1,610	1,280	0,810	0,200	-0,550	1,850
0,015	0,325	0,870	1,275	1,540	1,665	1,650	1,495	1,200	0,765	0,190	-0,525	1,665
0,02	0,000	0,580	1,020	1,320	1,480	1,500	1,380	1,120	0,720	0,180	-0,500	1,500
0,025	-0,325	0,290	0,765	1,100	1,295	1,350	1,265	1,040	0,675	0,170	-0,475	1,350
0,03	-0,650	0,000	0,510	0,880	1,110	1,200	1,150	0,960	0,630	0,160	-0,450	1,200
0,035	-0,975	-0,290	0,255	0,660	0,925	1,050	1,035	0,880	0,585	0,150	-0,425	1,050
0,04	-1,300	-0,580	0,000	0,440	0,740	0,900	0,920	0,800	0,540	0,140	-0,400	0,920
0,045	-1,625	-0,870	-0,255	0,220	0,555	0,750	0,805	0,720	0,495	0,130	-0,375	0,805
0,05	-1,950	-1,160	-0,510	0,000	0,370	0,600	0,690	0,640	0,450	0,120	-0,350	0,690
0,055	-2,275	-1,450	-0,765	-0,220	0,185	0,450	0,575	0,560	0,405	0,110	-0,325	0,575
0,06	-2,600	-1,740	-1,020	-0,440	0,000	0,300	0,460	0,480	0,360	0,100	-0,300	0,480
0,065	-2,925	-2,030	-1,275	-0,660	-0,185	0,150	0,345	0,400	0,315	0,090	-0,275	0,400
0,07	-3,250	-2,320	-1,530	-0,880	-0,370	0,000	0,230	0,320	0,270	0,080	-0,250	0,320
0,075	-3,575	-2,610	-1,785	-1,100	-0,555	-0,150	0,115	0,240	0,225	0,070	-0,225	0,240
0,08	-3,900	-2,900	-2,040	-1,320	-0,740	-0,300	0,000	0,160	0,180	0,060	-0,200	0,180
0,085	-4,225	-3,190	-2,295	-1,540	-0,925	-0,450	-0,115	0,080	0,135	0,050	-0,175	0,135
0,09	-4,550	-3,480	-2,550	-1,760	-1,110	-0,600	-0,230	0,000	0,090	0,040	-0,150	0,090
0,095	-4,875	-3,770	-2,805	-1,980	-1,295	-0,750	-0,345	-0,080	0,045	0,030	-0,125	0,045
0,1	-5,200	-4,060	-3,060	-2,200	-1,480	-0,900	-0,460	-0,160	0,000	0,020	-0,100	0,020

Рисунок 6. Выигрыш второго игрока

Мы можем сравнить результаты компьютерной модели с результатами математической модели, чтобы проверить корректность наших расчетов:

$$\hat{\eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{100}{700} - 0,03 \right) \approx 0,056, \quad \hat{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{100}{700} + 0,056 + 0,03 \right) \approx 0,11.$$

Как видим, результаты совпадают.

В статье рассмотрены методы математического и компьютерного моделирования взаимодействия Центрального и коммерческого банков. Математическое моделирование принятия решений по ключевой и кредитной ставкам сводится к задаче оптимизации дохода банков. Был выполнен теоретико-игровой анализ, который помог найти необходимое компромиссное решение. Таким образом, сравнивая итоговые результаты, найденные двумя методами при заданных параметрах, было получено совпадение оптимальных стратегий. Результаты модели могут быть использованы для определения оптимальных ключевых и кредитных ставок, которые обеспечат стабильность экономики и максимальную прибыль банков.

Список литературы:

- Грибанова, Е. Б. Исследование операций и методы оптимизации : Учебное пособие [Электронный ресурс] / Грибанова Е. Б., Мицель А. А. — Томск:

ТУСУР, 2017. — 185 с. — Режим доступа:
<https://edu.tusur.ru/publications/7127>.

2. Мазалов, В. В. Математическая теория игр и приложения : учебное пособие для вузов / В. В. Мазалов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 500 с. — ISBN 978-5-8114-5627-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/153917> (дата обращения: 11.03.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.