

УДК 622

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

Дадонов В.М., студент гр. АТс-221, I курс

Кузьмич Д.П., студент гр. АТс-221, I курс

Научный руководитель: Николаева Е.А., к. ф.-м.н., доцент

Кузбасский государственный технический университет

имени Т.Ф. Горбачева,

г. Кемерово

Ни для кого не является секретом тот факт, что когда-нибудь мы все с вами постареем и станем пенсионерами. Сейчас это нас несколько пугает, потому что мы очень привыкли к своему настоящему образу жизни и совершенно не можем представить, каким будет наш распорядок дня в старости. Давайте разберемся!

В качестве анализируемого объекта, мы взяли материальную точку N , дали ей имя, приписали возраст, и нафаршировали ее разными болезнями. Наша задача заключается в том, чтобы рассчитать наикратчайший маршрут до всех пунктов назначения, которые жизненно важно посетить нашему объекту.

Для этого давайте разберем ситуацию, основанную на реальных событиях: у нас есть старушка (пенсионерка) по имени Бабушка Зина. Ей 72 года, проживает она в городе Кемерово, улица Весенняя 26, квартира 54. В связи с тем, что Бабушка Зина уже не молодая, её, как и любого пенсионера в таком возрасте, не обошли стороной различные заболевания, а именно: сердечно-сосудистые заболевания, начальная стадия деменции, артрит и периодическая суставная боль, легкое нарушение в опорной двигательной системе, плохое зрение.

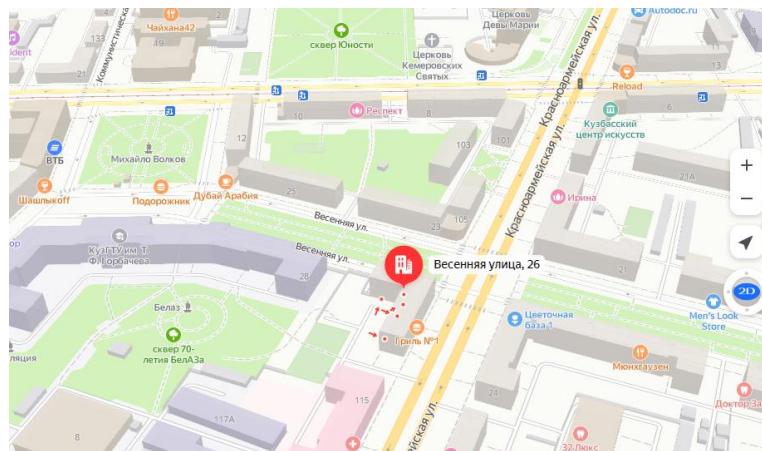


Рис.1.Место проживания (Дом)

Во дворе у нее стоит машина ваз 2107. Так как бензина осталось мало, то нужно найти самый кратчайший маршрут, чтобы посетить все необходимые места.

мые клиники, и при этом чтобы не закончился бензин в машине Бабушки Зины.

В качестве клиник мы взяли те, что были поблизости с домом, подходили по критерию предоставляемых услуг, и имели хорошие отзывы.

Клиники, которые рассматривались как пункты назначения в данной задаче: «Аврора»; «Хорошее зрение»; Областная больница; «Медлайн»; «Здоровье».

Расстояние от дома до клиники и расстояние от клиники до клиники мы определяли при помощи Яндекс карт:

От клиники «Аврора» до клиники «Хорошее зрение» – 1250 м;
От клиники «Аврора» до клиники «Здоровье» – 1240 м;
От клиники «Аврора» до клиники «Медлайн» – 1340 м;
От клиники «Аврора» до Областной больницы – 4000 м;
От клиники «Хорошее зрение» до клиники «Аврора» – 2200 м;
От клиники «Хорошее зрение» до клиники «Здоровье» – 1810 м;
От клиники «Хорошее зрение» до клиники «Медлайн» – 2140 м;
От клиники «Хорошее зрение» до Областной больницы – 4500 м;
От клиники «Здоровье» до клиники «Аврора» – 880 м;
От клиники «Здоровье» до клиники «Хорошее зрение» – 1840 м;
От клиники «Здоровье» до клиники «Медлайн» – 860 м;
От клиники «Здоровье» до Областной больницы – 3800 м;
От клиники «Медлайн» до клиники «Аврора» – 740 м;
От клиники «Медлайн» до клиники «Хорошее зрение» – 1680 м;
От клиники «Медлайн» до клиники «Здоровье» – 730 м;
От клиники «Медлайн» до Областной больницы – 3400 м;
От Областной больницы до клиники «Аврора» – 3600 м;
От Областной больницы до клиники «Хорошее зрение» – 3800 м;
От Областной больницы до клиники «Здоровье» – 3300 м;
От Областной больницы до клиники «Медлайн» – 2950 м.

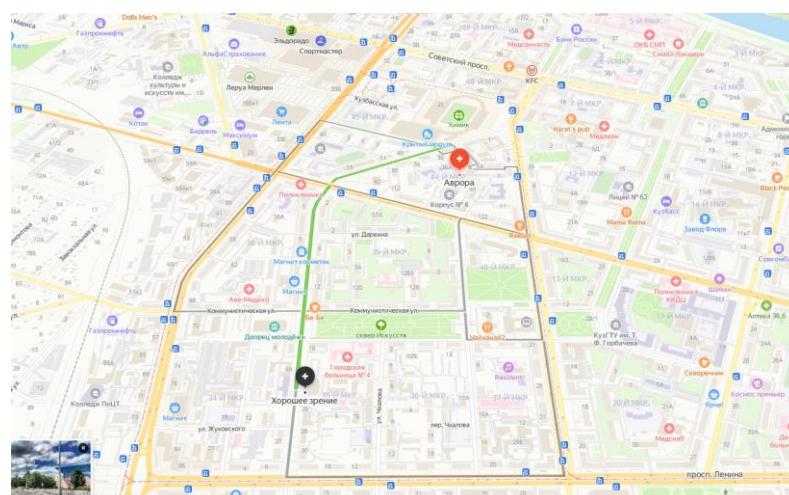


Рис.2. Путь от клиники «Аврора» до клиники «Хорошее зрение»

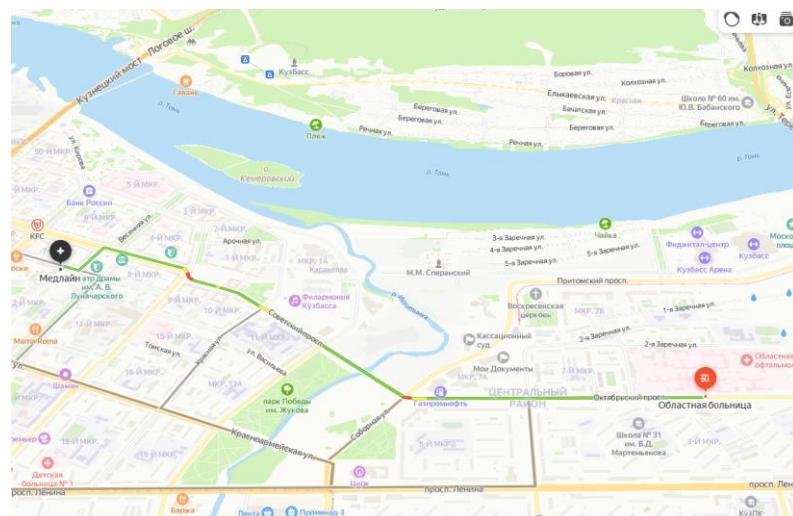


Рис.3. Путь от Областной больницы до клиники «Медлайн»

Итак, найдем наикратчайший маршрут при помощи задачи коммивояжера. Задача коммивояжёра – одна подзадача комбинаторной оптимизации. Она была поставлена в 1934 году, и об неё, как об Великую теорему Ферма, обламывали зубы лучшие математики.

Коммивояжер (бродячий торговец) должен выйти из первого города, посетить по разу в неизвестном порядке все n городов и вернуться в первый город. Расстояния между городами известны. В каком порядке следует обходить города, чтобы замкнутый путь (тур) коммивояжера был кратчайшим?

Математическая постановка задачи коммивояжёра:

$$\min (F(x)) = \sum c_{j_k j_{k+1}}$$

$j \in T = (1, 2, 3..n)$ – города, C_{ij} – расстояние между городами.

Тур коммивояжера должен быть описан циклической перестановкой $t = (j_1, j_2, \dots, j_n, j_1)$, причём все $j_1..j_n$ – разные номера; повторяющийся в начале и в конце j_1 , показывает, что перестановка зациклена. Расстояния между парами вершин образуют матрицу C . Задача состоит в том, чтобы найти такой тур t , чтобы минимизировать функцию $F(x)$.

В терминах теории графов симметричную задаче коммивояжёра можно сформулировать так: дана полная сеть, длина ребра $(i,j) = C_{ij}$. Найти гамильтонов цикл минимальной длины.

Первый шаг в задаче коммивояжера:

№ п/п	1	2	3	4	5
1	M	0,84	0,01	0,1	0,09
2	0,38	M	0,02	0,33	0,02
3	0,01	0,97	M	0,01	0,27
4	0,01	0,94	0,01	M	0,02
5	0,64	0,84	0,35	0,35	M

Для проверки правильности решения и быстрого получения результата воспользуемся онлайн-калькулятором коммивояжера.

Решение задачи коммивояжера

С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на M(бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

i \ j	1	2	3	4	5	d_i
1	M	0(0.84)	0(0)	0.1	0.09	0
2	0.38	M	0(0.02)	0.33	0.02	0.02
3	0.01	0.97	M	0(0.01)	0.27	0.01
4	0(0.01)	0.94	0(0)	M	0(0.02)	0
5	0.64	0.84	0.35	0(0.35)	M	0.35
d_j	0.01	0.84	0	0	0.02	0

$d(1,2) = 0 + 0.84 = 0.84$; $d(1,3) = 0 + 0 = 0$; $d(2,3) = 0.02 + 0 = 0.02$; $d(3,4) = 0.01 + 0 = 0.01$; $d(4,1) = 0 + 0.01 = 0.01$; $d(4,3) = 0 + 0 = 0$; $d(4,5) = 0 + 0.02 = 0.02$; $d(5,4) = 0.35 + 0 = 0.35$;

Наибольшая сумма констант приведения равна $(0 + 0.84) = 0.84$ для ребра (1,2), следовательно, множество разбивается на два подмножества (1,2) и $(1^*, 2^*)$.

Рис.4. Первый шаг в задаче коммивояжера

Решение задачи коммивояжера

Включение ребра (2,5) проводится путем исключения всех элементов 2-ой строки и 5-го столбца, в которой элемент d_{52} заменяется на M, для исключения образования негамильтона цикла.

В результате получим другую сокращенную матрицу (2×2) , которая подлежит операции приведения.

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

i \ j	1	3	d_i
3	0	M	0
4	0	0	0
d_j	0	0	0

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:

$$\sum d_i + \sum d_j = 0$$

Нижняя граница подмножества (2,5) равна:

$$H(2,5) = 10.31 + 0 = 10.31 \leq 10.55$$

Поскольку нижняя граница этого подмножества (2,5) меньше, чем подмножества $(2^*, 5^*)$, то ребро (2,5) включаем в маршрут с новой границей $H = 10.31$

Рис.5. Третий шаг в задаче коммивояжера (заключительный)

Решение задачи коммивояжера

Нижняя граница подмножества (2,5) равна:

$$H(2,5) = 10.31 + 0 = 10.31 \leq 10.55$$

Поскольку нижняя граница этого подмножества (2,5) меньше, чем подмножества $(2^*, 5^*)$, то ребро (2,5) включаем в маршрут с новой границей $H = 10.31$

В соответствии с этой матрицей включаем в гамильтонов маршрут ребра (3,1) и (4,3).

В результате по дереву ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра:

(1,2), (2,5), (5,4), (4,3), (3,1),

Длина маршрута равна $F(M_k) = 10.31$

Рис.6. Решение

С помощью калькулятора коммивояжера мы определили кратчайший маршрут между пунктами назначения. В результате получился такой маршрут:

1. От дома до клиники «Аврора» – 2410 м;
2. От клиники «Аврора» до клиники «Хорошее зрение» – 1250 м;
3. От клиники «Хорошее зрение» до Областной больницы – 4500 м;
4. От Областной больницы до клиники «Медлайн» – 2950 м;
5. От клиники «Медлайн» до клиники «Здоровье» – 730м;
6. От клиники «Здоровье» до клиники «Аврора» – 880м;
7. От клиники «Аврора» до дома – 1310 м;

Полностью весь маршрут составил 13150 м.

В результате Бабушке Зине хватило бензина посетить все клиники и доехать до дома.