

УДК 550.837

## МОДИФИКАЦИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В МЕТОДЕ ФУРЬЕ

Сирота Д. Ю., к.т.н., доцент кафедры ФПиСГ КузГТУ,

Забегалов К. Е., студент гр. ФПс-181, V Курс

Научный руководитель: Сирота Д. Ю., к.т.н., доцент.

Кузбасский государственный технический университет им. Т.Ф. Горбачева  
г. Кемерово

**Аннотация.** В заметке рассматривается модификация метода центральных прямоугольников численного интегрирования. Указанная модификация применяется в случае, когда подынтегральная функция является произведением двух функций, одна из которых должна быть интегрируема на отрезке. Приводятся тестовые примеры применения предлагаемого метода, а также примеры решения уравнений в частных производных методом Фурье. Для реализации составлены компьютерные программы на внутреннем языке программирования пакета численной математики Octave.

**Ключевые слова.** Численные методы, метод центральных прямоугольников, ряд Фурье, уравнения математической физики.

**Введение.** Одним из способов математического моделирования различных физических процессов является составление тех или иных дифференциальных уравнений. В случае если физический процесс развивается как в пространстве, так и во времени, то для его математической модели используются дифференциальные уравнения в частных производных.

Так [1, 2], в случае моделирования процессов динамики жидкости и газа в одномерном случае естественным образом получается уравнение  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  параболического типа; процессов распространения сигналов различной природы – уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  гиперболического типа; в случае стационарного, установившегося во времени геометрического распределения физического показателя – уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  эллиптического типа.

Одним из до сих пор используемых аналитических методов решения подобного сорта уравнений является метод разделения переменных Фурье, который заключается в представлении решения в виде произведения двух функций:  $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ . Полученное решение, вообще говоря, не является точным, но представляет собой разложение истинного неизвестного решения в ряд Фурье по собственным функциям вспомогательной задачи Штурма-

Лиувилля. Коэффициенты этого разложения определяются исходя из однородных (нулевых) граничных условий Дирихле, Неймана или их комбинации, а также начальных условий Коши.

Так, например, для известного уравнения колебания зажатой по краям струны длиной  $L$  с условиями Коши  $u(x,0) = \Phi(x)$ ,  $u_t(x,0) = \Psi(x)$  и условиями Дирихле  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  получим решение

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\lambda_k at) + b_k \sin(\lambda_k at)] \sin(\lambda_k x), \quad (1)$$

где  $\lambda_k = \pi k / L$  – собственные числа задачи Штурма-Лиувилля, коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$  разложения определяются по формулам

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L \Phi(x) \sin(\lambda_k x) dx, \quad b_k = \frac{2}{\pi k a} \int_0^L \Psi(x) \sin(\lambda_k x) dx. \quad (2)$$

Для уравнения распространения тепла вдоль стержня длиной  $L$  с условиями вида  $u(x,0) = \Phi(x)$ ,  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  получим решение

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-a^2 \lambda_k^2 t) \sin(\lambda_k x), \quad (3)$$

где параметр  $\lambda_k$  и коэффициент  $a_k$  определяются по вышеуказанным формулам.

**Метод решения и модификация.** Как видим, в обоих случаях необходимо вычислить определённый интеграл от произведения двух функций. Проблема осложняется тем, что один из сомножителей является периодической функцией с увеличивающимся до бесконечности коэффициентом  $\lambda_k = \pi k / L$ . Это приведёт к увеличению частоты колебаний общей подынтегральной функции, что в свою очередь приведёт к возрастанию вспомогательных подотрезков, на которые приходится разбивать исходный отрезок интегрирования при использовании тех или иных методов численного интегрирования.

Возможный выход из указанного затруднения является модификация метода центральных прямоугольников [3]:  $\int_a^b f(x)g(x)dx = h \sum_k f(u_k)g(u_k)$ , где

$u_k = x_k + h/2$ , а узлы  $x_k$  образуют равномерную сетку с шагом  $h$ . Каждое слагаемое представляет собой интеграл от исходной функции на малом интервале  $x \in [x_k; x_k + h]$ . Считая, что каждый сомножитель вида  $hg(u_k)$  также представляет собой приближённое значение интеграла на этом же промежутке, получим модифицированную расчётную формулу

$$F = \int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^n f(u_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx = \sum_{k=1}^n f(u_k)C_k. \quad (4)$$

Прежде чем переходить к реализации формул (2) рассмотрим два **тестовых** интеграла, где будет осциллирующая функция  $g(x)$ , а для функции  $f(x)$  метод прямоугольников не будет выполняться абсолютно точно:

a)  $I_T = \int_0^\pi x^3 \sin x dx = \pi^3 - 6\pi$  и б)  $I_T = \int_0^\pi e^x \sin x dx = \frac{e^\pi + 1}{2}$ .

Тогда для пункта а)

$I_{\Pi} = \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx = \sum_k u_k^3 \int_{y_k}^{y_{k+1}} \sin(x) dx = \sum_k u_k^3 \cdot [\cos(x_k) - \cos(x_{k+1})]$ . Если разбить интервал  $[0; \pi]$  на 10 частей с шагом  $h \sim 10^{-1}$ , то погрешность будет равна  $\Delta = |I_{\Pi} - I_T| = 7,675 \cdot 10^{-2}$ ; если же разбить интервал  $[0; \pi]$  на 100 частей с шагом  $h \sim 10^{-2}$ , то погрешность будет равна  $\Delta = |I_{\Pi} - I_T| = 7,751 \cdot 10^{-4}$ .

Для пункта б)

$I_{\Pi} = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \sum_k e^{u_k} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \sin(x) dx = \sum_k e^{u_k} \cdot [\cos(x_k) - \cos(x_{k+1})]$ . Если разбить интервал  $[0; \pi]$  на 10 частей с шагом  $h \sim 10^{-1}$ , то погрешность будет равна  $\Delta = |I_{\Pi} - I_T| = 4,872 \cdot 10^{-2}$ ; если же разбить интервал  $[0; \pi]$  на 100 частей с шагом  $h \sim 10^{-2}$ , то погрешность будет равна  $\Delta = |I_{\Pi} - I_T| = 4,963 \cdot 10^{-4}$ .

Таким образом, можно заключить, что погрешность предложенной квадратурной формулы  $\Pi \sim h^2$ , что в целом является удовлетворительным, так как совпадает с оригинальным методом центральных прямоугольников.

Теперь применим предлагаемую модификацию к формулам (2).

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L \Phi(x) \sin(\lambda_k x) dx = \frac{2}{L \lambda_k} \sum_{j=1}^L \Phi(u_j) [\cos(\lambda_k x_j) - \cos(\lambda_k x_{j+1})], \quad (5)$$

$$b_k = \frac{2}{\pi k a} \int_0^{\pi k a} \Psi(x) \sin(\lambda_k x) dx = \frac{2}{\pi k a \lambda_k} \sum_{j=1}^L \Psi(u_j) [\cos(\lambda_k x_j) - \cos(\lambda_k x_{j+1})], \quad (6)$$

где  $u_j = x_j + h/2$ , а узлы  $x_j$  образуют равномерную сетку с шагом  $h$ .

**Расчёт, сравнение, анализ.** В качестве реальных примеров рассмотрим волновое уравнение и уравнение теплопередачи. Условия Коши имеют вид:  $\Phi(x) = 10x(1-x)e^x$  и  $\Psi(x) = 10x(1-x)e^x$ ,  $x \in [0; 1]$ . На границах заданы нулевые условия Дирихле. Кодирование формул будем производить в бесплатном и открытом аналоге Matlab'a – программе Octave [4].

Исходный код для уравнения теплопередачи

```
function U = RMT(t, x, a, n)
for k = 1 : 1 : n lam(k) = pi.*k; ak(k) = 2.0.*Integ(lam(k))./lam(k); end;
for i = 1 : 1 : length(t) for j = 1 : 1 : length(x)
    S = 0.0;
    for k = 1 : 1 : n
        S = S + ak(k).*exp(-a.*a.*lam(k).*lam(k).*t(i)).*sin(lam(k).*x(j));
    end
    U(i,j) = S;
endfor endfor
end
```

Исходный код для волнового уравнения

```
function U = RMV(t,x,a,n)
for k = 1 : 1 : n
    lam(k) = pi.*k; ak(k) = 2.0.*Intega(lam(k))./lam(k);
```

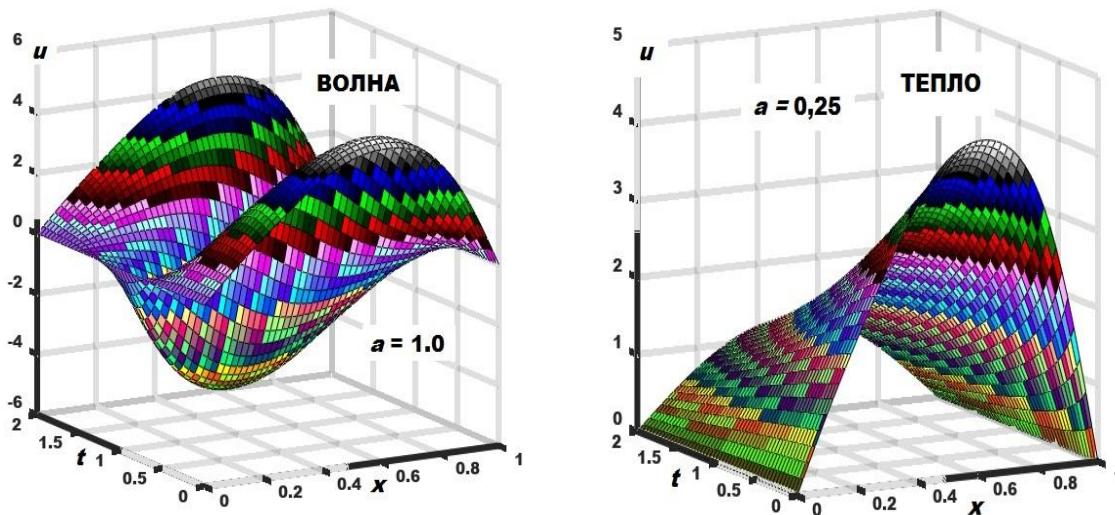
```
bk(k) = 2.0.*Integb(lam(k))./(pi.*k.*a.*lam(k));
end
for i = 1 : 1 : length(t)  for j = 1 : 1 : length(x)
    S = 0.0;
    for k = 1 : 1 : n
        SK = ak(k).*cos(lam(k).*a.*t(i)) + bk(k).*sin(lam(k).*a.*t(i));
        S = S + SK.*sin(lam(k).*x(j));
    end
    U(i,j) = S;
endfor endfor
end
Исходный код для вычисления интегралов коэффициентов  $a_k$ ,  $b_k$ .
function res = Intega(lam)
h = 0.01; x1 = 0.0; x2 = h; u = x1+h./2.0; S=0;
for k = 1:1:100
    S = S + FI(u).*(cos(lam.*x1)-cos(lam.*x2));
    x1 = x2; x2 = x1 + h; u = x1 + h./2.0;
end
res = S;
end
function res = FI(x) res = 10.0.*x.*(1.0 - x).*exp(x); end
function res=Integb(lam)
h = 0.01;
x1 = 0.0; x2 = h; u = x1+h./2.0;
S=0;
for k = 1:1:100
    S = S + PSI(u).*(cos(lam.*x1)-cos(lam.*x2));
    x1 = x2; x2 = x1 + h; u = x1 + h./2.0;
end
res = S;
end
function res = PSI(x) res = 10.0.*x.*(1.0 - x).*exp(x); end.
```

Приведём графики поверхностей (см. рисунок 1) решений для указанных выше уравнений («Волна», «Тепло») на временном интервале  $t \in [0; T]$ , значения параметра указаны на рисунках. Количество слагаемых ряда Фурье в том и другом случаях одинаково и равно пяти.

**Выводы.** Предложенная модификация метода центральных прямоугольников позволяет:

- 1) избежать громоздких вычислений, обусловленных методом Гаусса;
- 2) уменьшить количество слагаемых в ряде Фурье. Практика расчётов показала, что при использовании метода Гаусса при 5-ти слагаемых становятся видны волнообразные артефакты, обусловленные тригонометрической сущностью ряда Фурье. В случае же использования предложенным методом уже 5 слагаемых достаточно, чтобы избежать явного появления артефактов, при

этом увеличение количества слагаемых в десять раз приведёт к увеличению расчётов лишь на 0,1, что несущественно.



– рисунок 1.

Поверхности решений уравнений колебаний струны и передачи тепла

### Список литературы

1. Сирота, Д. Ю. Уравнения математической физики: учебное пособие для студентов специальности 21.05.05 "Физические процессы горного или нефтегазового производства" / Д. Ю. Сирота ; Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева. Кемерово: КузГТУ, 2022. 1 файл (6,04 Мб). ISBN 978-5-00137-341-4.
2. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики. – М. «Высшая школа», 1970 г. – 722 с.
3. Пантелеев, А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова // – М. Высшая школа, – 2005, – 544 с.
4. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave для инженеров и математиков / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова // – М.: ALT Linux, 2012, – 368 с.