

УДК 550.837

МОДИФИКАЦИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В МЕТОДЕ ФУРЬЕ

Сирота Д. Ю., к.т.н., доцент кафедры ФПиСГ КузГТУ,
Забегалов К. Е., студент гр. ФПс-181, V Курс

Научный руководитель: Сирота Д. Ю., к.т.н., доцент.
Кузбасский государственный технический университет им. Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

Аннотация. В заметке рассматривается модификация метода центральных прямоугольников численного интегрирования. Указанная модификация применяется в случае, когда подынтегральная функция является произведением двух функций, одна из которых должна быть интегрируема на отрезке. Приводятся тестовые примеры применения предлагаемого метода, а также примеры решения уравнений в частных производных методом Фурье. Для реализации составлены компьютерные программы на внутреннем языке программирования пакета численной математики Octave.

Ключевые слова. Численные методы, метод центральных прямоугольников, ряд Фурье, уравнения математической физики.

Введение. Одним из способов математического моделирования различных физических процессов является составление тех или иных дифференциальных уравнений. В случае если физический процесс развивается как в пространстве, так и во времени, то для его математической модели используются дифференциальные уравнения в частных производных.

Так [1, 2], в случае моделирования процессов динамики жидкости и газа в одномерном случае естественным образом получается уравнение

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ параболического типа; процессов распространения сигналов раз-

личной природы – уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ гиперболического типа; в случае

стационарного, установившегося во времени геометрического распределения физического показателя – уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ эллиптического типа.

Одним из до сих пор используемых аналитических методов решения подобного сорта уравнений является метод разделения переменных Фурье, который заключается в представлении решения в виде произведения двух функций: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Полученное решение, вообще говоря, не является точным, но представляет собой разложение истинного неизвестного решения в ряд Фурье по собственным функциям вспомогательной задачи Штурма-

Лиувилля. Коэффициенты этого разложения определяются исходя из однородных (нулевых) граничных условий Дирихле, Неймана или их комбинации, а также начальных условий Коши.

Так, например, для известного уравнения колебания зажатой по краям струны длиной L с условиями Коши $u(x,0) = \Phi(x)$, $u_t(x,0) = \Psi(x)$ и условиями Дирихле $u(0,t) = u(L,t) = 0$ получим решение

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\lambda_k at) + b_k \sin(\lambda_k at)] \sin(\lambda_k x), \quad (1)$$

где $\lambda_k = \pi k / L$ – собственные числа задачи Штурма-Лиувилля, коэффициенты a_k , b_k разложения определяются по формулам

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L \Phi(x) \sin(\lambda_k x) dx, \quad b_k = \frac{2}{\pi k a} \int_0^L \Psi(x) \sin(\lambda_k x) dx. \quad (2)$$

Для уравнения распространения тепла вдоль стержня длиной L с условиями вида $u(x,0) = \Phi(x)$, $u(0,t) = u(L,t) = 0$ получим решение

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-a^2 \lambda_k^2 t) \sin(\lambda_k x), \quad (3)$$

где параметр λ_k и коэффициент a_k определяются по вышеуказанным формулам.

Метод решения и модификация. Как видим, в обоих случаях необходимо вычислить определённый интеграл от произведения двух функций. Проблема осложняется тем, что один из сомножителей является периодической функцией с увеличивающимся до бесконечности коэффициентом $\lambda_k = \pi k / L$. Это приведёт к увеличению частоты колебаний общей подынтегральной функции, что в свою очередь приведёт к возрастанию вспомогательных подотрезков, на которые приходится разбивать исходный отрезок интегрирования при использовании тех или иных методов численного интегрирования.

Возможный выход из указанного затруднения является модификация метода центральных прямоугольников [3]: $\int_a^b f(x)g(x)dx = h \sum_k f(u_k)g(u_k)$, где $u_k = x_k + h/2$, а узлы x_k образуют равномерную сетку с шагом h . Каждое слагаемое представляет собой интеграл от исходной функции на малом интервале $x \in [x_k; x_k + h]$. Считая, что каждый сомножитель вида $hg(u_k)$ также представляет собой приближённое значение интеграла на этом же промежутке, получим модифицированную расчётную формулу

$$F = \int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^n f(u_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx = \sum_{k=1}^n f(u_k) C_k. \quad (4)$$

Прежде чем переходить к реализации формул (2) рассмотрим два **тестовых** интеграла, где будет осциллирующая функция $g(x)$, а для функции $f(x)$ метод прямоугольников не будет выполняться абсолютно точно:

$$\text{а) } I_T = \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx = \pi^3 - 6\pi \quad \text{и б) } I_T = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{e^{\pi} + 1}{2}.$$

Тогда для пункта а)

$$I_{\Pi} = \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx = \sum_k u_k^3 \int_{y_k}^{y_{k+1}} \sin(x) dx = \sum_k u_k^3 \cdot [\cos(x_k) - \cos(x_{k+1})].$$

Если разбить интервал $[0; \pi]$ на 10 частей с шагом $h \sim 10^{-1}$, то погрешность будет равна $\Delta = |I_{\Pi} - I_{\Gamma}| = 7,675 \cdot 10^{-2}$; если же разбить интервал $[0; \pi]$ на 100 частей с шагом $h \sim 10^{-2}$, то погрешность будет равна $\Delta = |I_{\Pi} - I_{\Gamma}| = 7,751 \cdot 10^{-4}$.

Для пункта б)

$$I_{\Pi} = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \sum_k e^{u_k} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \sin(x) dx = \sum_k e^{u_k} \cdot [\cos(x_k) - \cos(x_{k+1})].$$

Если разбить интервал $[0; \pi]$ на 10 частей с шагом $h \sim 10^{-1}$, то погрешность будет равна $\Delta = |I_{\Pi} - I_{\Gamma}| = 4,872 \cdot 10^{-2}$; если же разбить интервал $[0; \pi]$ на 100 частей с шагом $h \sim 10^{-2}$, то погрешность будет равна $\Delta = |I_{\Pi} - I_{\Gamma}| = 4,963 \cdot 10^{-4}$.

Таким образом, можно заключить, что погрешность предложенной квадратурной формулы $\Pi \sim h^2$, что в целом является удовлетворительным, так как совпадает с оригинальным методом центральных прямоугольников.

Теперь применим предлагаемую модификацию к формулам (2).

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L \Phi(x) \sin(\lambda_k x) dx = \frac{2}{L \lambda_k} \sum_{j=1}^L \Phi(u_j) [\cos(\lambda_k x_j) - \cos(\lambda_k x_{j+1})], \quad (5)$$

$$b_k = \frac{2}{\pi k a_0} \int_0^L \Psi(x) \sin(\lambda_k x) dx = \frac{2}{\pi k a_0 \lambda_k} \sum_{j=1}^L \Psi(u_j) [\cos(\lambda_k x_j) - \cos(\lambda_k x_{j+1})], \quad (6)$$

где $u_j = x_j + h/2$, а узлы x_j образуют равномерную сетку с шагом h .

Расчёт, сравнение, анализ. В качестве реальных примеров рассмотрим волновое уравнение и уравнение теплопередачи. Условия Коши имеют вид: $\Phi(x) = 10x(1-x)e^x$ и $\Psi(x) = 10x(1-x)e^x$, $x \in [0; 1]$. На границах заданы нулевые условия Дирихле. Кодирование формул будем производить в бесплатном и открытом аналоге Matlab'a – программе Octave [4].

Исходный код для уравнения теплопередачи

```
function U = RMT(t, x, a, n)
for k = 1 : 1 : n lam(k) = pi.*k; ak(k) = 2.0.*Integ(lam(k))./lam(k); end;
for i = 1 : 1 : length(t) for j = 1 : 1 : length(x)
S = 0.0;
for k = 1 : 1 : n
S = S + ak(k).*exp(-a.*a.*lam(k).*lam(k).*t(i)).*sin(lam(k).*x(j));
end
U(i,j) = S;
endfor endfor
end
```

Исходный код для волнового уравнения

```
function U = RMV(t,x,a,n)
for k = 1 : 1 : n
lam(k) = pi.*k; ak(k) = 2.0.*Intega(lam(k))./lam(k);
```

```

    bk(k) = 2.0.*Integb(lam(k))./(pi.*k.*a.*lam(k));
end
for i = 1 : 1 : length(t)  for j = 1 : 1 : length(x)
    S = 0.0;
    for k = 1 : 1 : n
        SK = ak(k).*cos(lam(k).*a.*t(i)) + bk(k).*sin(lam(k).*a.*t(i));
        S = S + SK.*sin(lam(k).*x(j));
    end
    U(i,j) = S;
endfor endfor
end

```

Исходный код для вычисления интегралов коэффициентов a_k, b_k .

```

function res = Intega(lam)
h = 0.01; x1 = 0.0; x2 = h; u = x1+h./2.0; S=0;
for k = 1:1:100
    S = S + FI(u).*(cos(lam.*x1)-cos(lam.*x2));
    x1 = x2; x2 = x1 + h; u = x1 + h./2.0;
end
res = S;
end
function res = FI(x) res = 10.0.*x.*(1.0 - x).*exp(x); end
function res=Integb(lam)
h = 0.01;
x1 = 0.0; x2 = h; u = x1+h./2.0;
S=0;
for k = 1:1:100
    S = S + PSI(u).*(cos(lam.*x1)-cos(lam.*x2));
    x1 = x2; x2 = x1 + h; u = x1 + h./2.0;
end
res = S;
end
function res = PSI(x) res = 10.0.*x.*(1.0 - x).*exp(x); end.

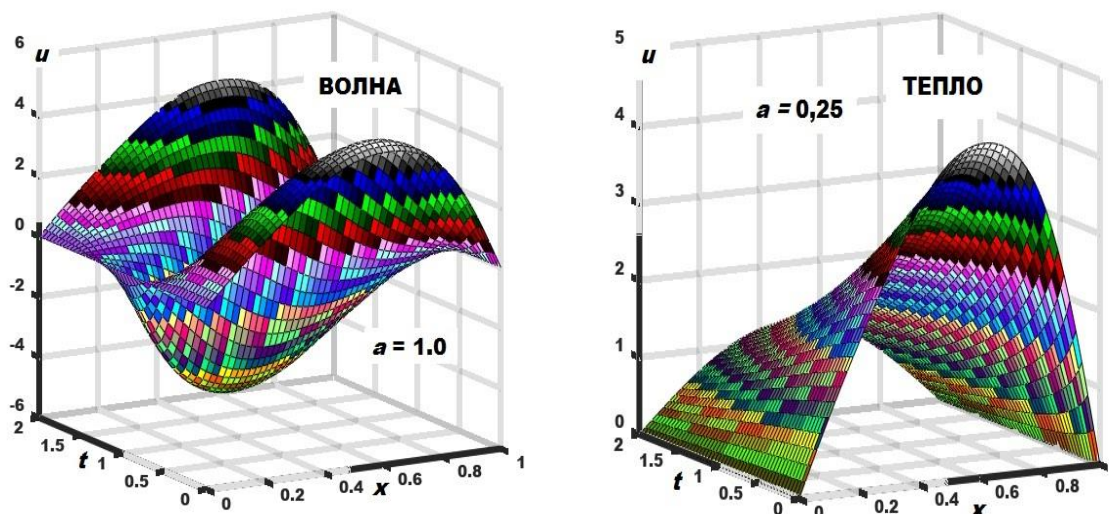
```

Приведём графики поверхностей (см. рисунок 1) решений для указанных выше уравнений («Волна», «Тепло») на временном интервале $t \in [0; T]$, значения параметра указаны на рисунках. Количество слагаемых ряда Фурье в том и другом случаях одинаково и равно пяти.

Выводы. Предложенная модификация метода центральных прямоугольников позволяет:

- 1) избежать громоздких вычислений, обусловленных методом Гаусса;
- 2) уменьшить количество слагаемых в ряде Фурье. Практика расчётов показала, что при использовании метода Гаусса при 5-ти слагаемых становятся видны волнообразные артефакты, обусловленные тригонометрической сутью ряда Фурье. В случае же использования предложенным методом уже 5 слагаемых достаточно, чтобы избежать явного появления артефактов, при

этом увеличение количества слагаемых в десять раз приведёт к увеличению расчётов лишь на 0,1, что несущественно.



– рисунок 1.

Поверхности решений уравнений колебаний струны и передачи тепла

Список литературы

1. Сирота, Д. Ю. Уравнения математической физики: учебное пособие для студентов специальности 21.05.05 "Физические процессы горного или нефтегазового производства" / Д. Ю. Сирота ; Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева. Кемерово: КузГТУ, 2022. 1 файл (6,04 Мб). ISBN 978-5-00137-341-4.
2. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики. – М. «Высшая школа», 1970 г. – 722 с.
3. Пантелеев, А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова // – М. Высшая школа, – 2005, – 544 с.
4. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave для инженеров и математиков / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова // – М.: ALT Linux, 2012, – 368 с.