УДК 378

МОДЕЛЬ МАРКОВИЦА В ТЕОРИИ ПОРТФЕЛЯ: ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ

Шмидт О.Е, студент гр. БЭс-191, III курс
Бочарова А.Е., студент гр. БЭс-191, III курс
Николаева Е.А., к.ф.-м.н., доцент
Кузбасский государственный технический университет
имени. Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

Важным элементом в экономическом образовании является анализ инвестиций. Данный анализ необходим для того, чтобы определить доходность вложений, а также сопоставить возможный доход с инвестиционными рисками. Самое широкое распространение имеет задача, в которой нужно составить такой портфель, активы (ценные бумаги) в котором будут иметь максимальную доходность при минимальных рисках. Одно из решений такой задачи предложил в середине XX века Гарри Марковиц, американский экономист. Его портфельная теория предполагала сформировать портфель инвестора с наиболее оптимальными (то есть, с максимально доходными и имеющими минимальные риски) долями активов. Однако, с точки зрения математики, у такой задачи нет решения. Поэтому, чаще всего, рассматриваются задачи следующего типа:

– расчет такой доли каждого актива, которые обеспечат максимальную доходность при известном уровне риска;

– расчет такой доли активов, при которых будет достигнут минимальный уровень риска при известной доходности.

Итогом решения задачи по модели Марковица всегда будет множество оптимальных портфелей. Условием оптимальности при этом является то, что доходность невозможно увеличить без повышения риска, а уровень риска невозможно снизить без уменьшения доходности.

Графически множество решений задачи по Марковицу представлено на рисунке 1.

На рисунке 1 точками обозначены виды активов, которые рассматривает инвестор. По оси абсцисс обозначается доход, а по оси ординат – возможный уровень риска. Оптимальные (эффективные) множества изображены в виде овала, а оптимальные портфели – в виде закрашенных точек. При этом пустыми точками изображены допустимые портфели, которые, однако, не являются оптимальными. Вне овала находятся те портфели, которые являются недопустимыми: их риск слишком высок при низком уровне доходности.

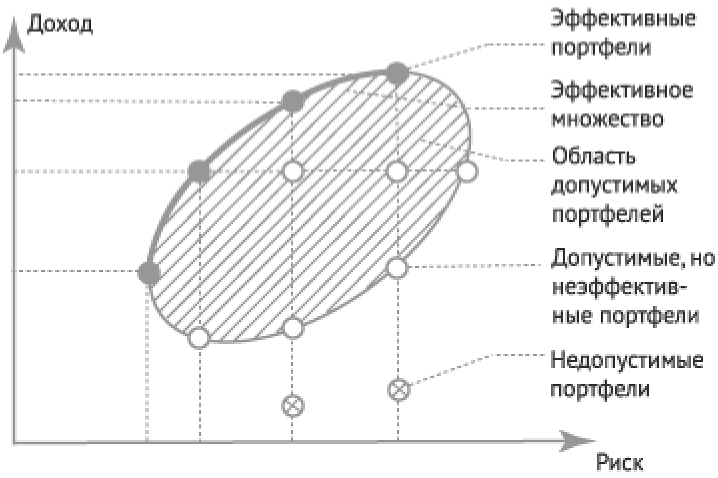

Рисунок 1 – модель Марковица для решения задачи по формированию оптимального инвестиционного портфеля

В основе модели Марковица лежат следующие положения:

– инвестор всегда располагает информацией об ожидаемых значениях доходности всех активов, а также возможностью диверсифицировать свои риске. Это он может сделать, например, анализируя статистические данные;

– инвестор всегда старается минимизировать свои риски и при одинаковой доходности портфелей, он выберет тот, у которого будет наименьший риск;

– доходность портфеля является случайной величиной: инвестор имеет право формировать любой портфель, который будет удовлетворять условиям модели.

Сама модель Марковица – частный случай другой модели для нахождения инвестиционного портфеля – модели Блэка. Однако в модели Марковица рассматриваются только портфели, имеющие положительную оценку.

Пусть имеется портфель, состоящий из двух активов – $A = \{A_1, A_2\}$. Характеристики этого портфеля – вектор средних величин m и матрица ковариации C. Портфель является минимальным, если его риск наименьший из всех возможных портфелей. Такой портфель обозначим за $x_{min}=(x_1, x_2)$. Веса этого портфеля будут находиться по следующим формулам:

$$X_1=\frac{C_{22}-C_{12}}{C_{11}+C_{22}-2C_{12}}; \qquad X_2=1-x_1=\frac{C_{11}-C_{12}}{C_{11}+C_{22}-2C_{12}}$$

Доходность E и риск V этого портфеля тогда будут вычисляться по формулам:

$$\mathrm{E}_{min}=E[x]=m_1x_1+m_2x_2=\frac{m_1(C_{22}-C_{12})+m_2(C_{11}-C_{12})}{C_{11}+C_{22}-2C_{12}}$$

$$\mathrm{V}_{min}=V[x]=c_{11}(x_1)^2+2c_{12}x_2x_1+c_{12}(x_2)^2=\frac{C_{11}C_{12}-C_{12}^2}{C_{11}+C_{22}-2C_{12}}$$

Рассмотрим рынок двух ценных бумаг – $A = \{A_1, A_2\}$ со следующими характеристиками:

$$M=(1,3),\ C=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 15\end{pmatrix}$$

Найти портфель с минимальным риском и его оценку (E_{min}, V_{min}).

Портфель с наименьшим риском в модели Марковица будет иметь следующий вид:

$$X_1=\frac{C_{22}-C_{12}}{C_{11}+C_{22}-2C_{12}}=\frac{15-5}{3+15-10}=\frac{10}{8}$$
$$X_2=\frac{C_{11}-C_{12}}{C_{11}+C_{22}-2C_{12}}=\frac{3-5}{3+15-10}=\frac{-2}{8}$$

– не удовлетворяет условиям модели Марковица.

$$E_{min}=m_1x_1+m_2x_2=1*1.25=1.25$$
$$V_{min}=c_{11}(x_1)^2+2c_{12}x_2x_1+c_{12}(x_{2)})^2=3*9+2*5*0*1.25+0=27$$

Портфель с минимальным риском – x_{min}=(1;0), его ожидаемая доходность – 1,25, а предполагаемый риск = 27.

Модель Марковица с тремя активами. Пусть рынок состоит из трех активов A_1, A_2, A_3, а его параметры задаются вектором доходности $m=(m_1, m_2, m_3)$ и матрицей ковариации $C=(c_{ij})$, i,j=1,2,3. Все портфели описываются векторами $x=(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющими условию:

$$(e,x)= x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

При этом существует дополнительное условие неотрицательности: $x_{1,2,3}\geq 0$.

Критериальное множество на плоскости (E, V) в трехмерной модели Марковица есть часть плоскости, ограниченной конечным набором отрезков парабол. Следовательно, на плоскости (E, Ȍ) оно представляет собой часть плоскости, которая ограничена конечным набором отрезков гипербол. Эскиз данного множества представлен на рисунке 2.

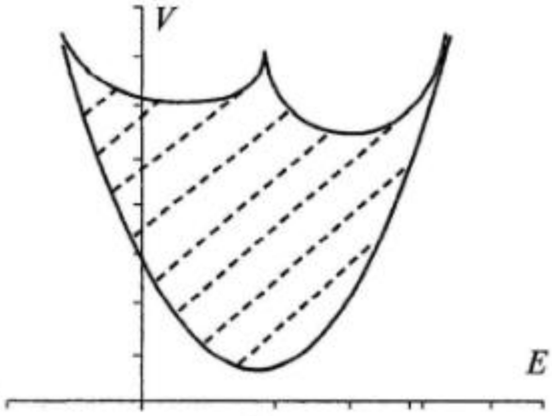

Рисунок 2 – эскиз критериального множества для трехмерной модели Марковица

Модель Марковица – полезный инструмент для решения экономических задач математическими методами. На ее примере хорошо демонстрируется практическое применение матричного исчисления, а также пример использования графиков математических функций при решении экономических задач. Однако для того, чтобы решение задачи методом Марковица было возможно, необходимо чтобы значение ожидаемой доходности лежало в определённом промежутке, иначе решение задачи может содержать отрицательные значения долей некоторых видов ценных бумаг в портфеле.

Список литературы:

1. Касимов Ю.Ф. Финансы и инвестиции. М.: Аль-Натор, 2008.
2. Модель Марковица: математические аспекты и компьютерная реализация // Cyberleninka.ru URL: https://cyberleninka.ru/article/n/model-markovitsa-matematicheskie-aspekty-i-kompyuternaya-realizatsiya/viewer (дата обращения: 20.11.2021).