УДК 539.3

ЯДРО НАСЛЕДСТВЕННОСТИ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Реимов А., студент гр. 102-21, I курс
Научный руководитель: Абдукаримов А., к.ф.-м.н., доцент
Ташкентский государственный технический университет
г. Ташкент

В данной работе, используя интегральную зависимость между напряжениями и деформациями, рассматривается процесс ползучести и релаксации материала. Приводится слабосингулярные ядра Абеля, Ржаницына–Колтунова и экспоненциальное ядро Ю. Н. Работнова.

Heredity kernel with a weak singularity.

In this work, using the integral relationship between stress and strain, considers the process of creep and relaxation of the material. Given weakly singular kernels by Abel, Rzhanitsina-Koltunova and exponential kernel by Rabotnov.

При исследовании динамических задач наследственно – деформируемых систем существенное значение имеет выбор ядра наследственности, достаточно хорошо воспроизводящего свойства реальных материалов. Для этой цели рассмотрим процесс ползучести и релаксации материала.

Решая интегральное уравнение

$$\sigma = E(1-R^*)\varepsilon , \tag{1}$$

относительно ε имеем:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\,\frac{1}{1-R^*}\,\sigma(t) = \frac{1}{E}(1+\Gamma^*)\,\sigma(t), \tag{2}$$

где

$$\frac{1}{1-R^*} = 1+\Gamma^*; \tag{3}$$

$$\Gamma^*\sigma = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau,$$

E – модуль упругости; $\Gamma(t-\tau)$ – функция влияния напряжения, убывающая при возрастании $(t-\tau)$.

Применение интегрального соотношения (1) и (2) позволяет развить весьма гибкий математический аппарат для описания процессов ползучести и релаксации.

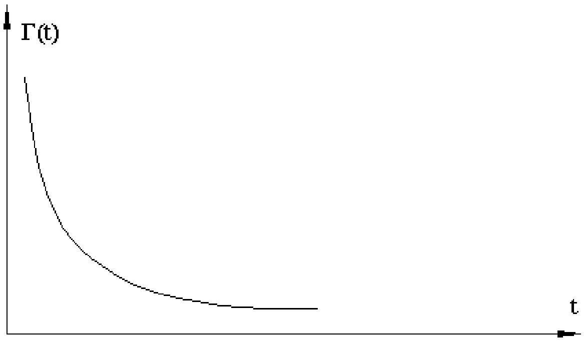
Процесс изменения деформации тела во времени при постоянном напряжении называется ползучестью.

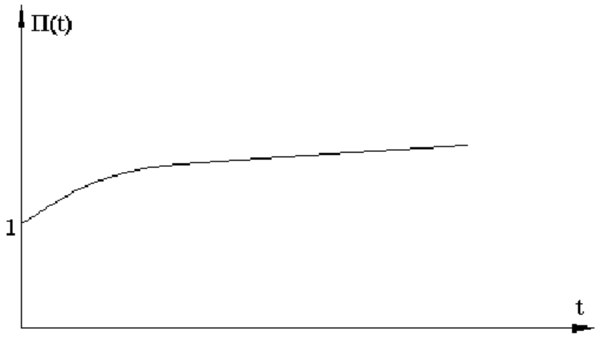
При $\sigma = \sigma_0$ –const из (2) имеем

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\left[1+\int_0^t \Gamma(\tau)\,d\tau\right] = \frac{\sigma_0}{E}\Pi(t). \tag{4}$$

В дальнейшем функцию *П(t)* будем называть функцией ползучести. Графики функций *Г(t)* и *П(t)* выглядят следующим образом:

Рис. 1 Рис. 2





Дифференцируя обе части уравнения (4) по *t*, находим

$$\Gamma(t)=\frac{E}{\sigma_0}\,\frac{d\,\varepsilon}{d\,t}\cdot \qquad (5)$$

Установлено, что при t = 0, $\frac{d\,\varepsilon}{d\,t}\to\infty$, поэтому функции *Г(t)* или ядро ползучести должно обладать свойством сингулярности, т.е. $\Gamma(0)=\infty$ (см. рис. 1), причем согласно уравнению (4), интеграл от $\Gamma(t)$ должен быть конечной величиной. Такие функции называются слабосингулярными или функциями со слабой особенностью [1-4].

Процесс изменения напряжений в теле во времени при постоянной деформации называется релаксацией.

При $\varepsilon=\varepsilon_0$ –const из (1) имеем

$$\sigma=E\,\varepsilon_0\left[1-\int_0^t R(\tau)\,d\tau\right]\cdot \qquad (6)$$

Здесь R(t) – ядро релаксации,

$$R(t)=-\frac{1}{E\,\varepsilon_0}\,\frac{d\,\sigma}{d\,t}\cdot \qquad (7)$$

Из (3) следует, что между функциями *Г(t)* и *R(t)* существует связь:

$$R(t)-\int_0^t \Gamma(t-\tau)\,R(\tau)\,d\tau=\Gamma(t), \qquad (8)$$

позволяющая по одной из известных функций, например *Г(t)*, найти другую *R(t)*.

Поскольку функция *Г(t)* имеет особенности при t = 0, то на основании уравнения (8) заключаем, что функция *R(t)* при *t* = 0 должна быть слабосингулярной, т.е. при *t*=0, R(0) = ∞.

Самой простейшей функцией, удовлетворяющей приведенному выше условию, является ядро Абеля [2]:

$$R(t)=\varepsilon\,t^{\alpha-1},\quad \varepsilon>0,\quad 0<\alpha<1, \qquad (9)$$

где ε и α называется реологическим параметром, определяемым экспериментально.

Самое распространенное слабосингулярное ядро наследственности типа Абеля – ядро Ржаницына–Колтунова [1-2]:

$$R(t) = \varepsilon e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \qquad \varepsilon > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{10}$$

где ε – параметр вязкости; β – параметр затухания; α – параметр сингулярности ядра наследственности.

Наконец, к числу слабосингулярного ядра наследственности типа Абеля относится дробно экспоненциальное ядро Ю. Н. Работнова [4]:

$$R(t) = \varepsilon \text{Э}_\alpha(\chi, t) = \varepsilon t^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-\chi)^j \frac{t^{j(1+\alpha)}}{\Gamma[(j+1)(1+\alpha)]}, \tag{11}$$

где Г[ ] – гамма-функция Эйлера. При $\alpha = 0$, $\text{Э}_0(\chi, t) = e^{-\chi t}$ и дробно-экспоненциальные функции становятся обычно экспоненциальными.

Таким образом, применение интегрального соотношения между напряжениями и деформациями позволяет развить математический аппарат для описания процессов ползучести и релаксации.

Список литературы:

1. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация -М.: Высшая школа,1976.-276 с.
2. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. -М.: Стройиздат, 1986. -418 с.
3. Ахундов М.Б., Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В. Модель деформируемого твердого тела с реакцией и приложение ее к биомеханики. //МДТТ.-1985, -№6, -С. 90-100.
4. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. -М.:Наука,1966.-752с.
5. Бадалов Ф. Б., Адукаримов А. Функции синуса и косинуса дробного порядка и их приложение к решению динамических задач наследственно-деформируемых систем.- Ташкент: ФАН, 2004.-155 с.