УДК 378

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент
Липина Г.А., старший преподаватель
Шмидт О.Е., студент гр. БЭс-191, III курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В предлагаемой работе рассматривается метод доказательства различных неравенств, называемый методом математической индукции. Базис этого подхода составляют шаги 1 и 2, которые можно описать следующим образом.

Шаг 1. Проверим, что неравенство, которое требуется доказать, верно при начальном значении целочисленного индекса $n=n_0$ (представленного в неравенстве);

Шаг 2. Доказываем его истинность при любом целом $n+1$, исходя из предположения, что неравенство, которое нужно обосновать, справедливо при некотором произвольном значении индекса n, откуда и будет следовать его истинность при любом значении указанного индекса.

Продемонстрируем его на конкретных задачах, выделяя указанные шаги отдельной нумерацией для наглядности.

Задача 1.

Доказать, что

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+a_i\right)\geq 1+\sum_{k=1}^{n}a_k\ , \qquad -1<a_i\leq 0\ \left(i=1,...,n\right).$$

Доказательство данного неравенства проведем методом математической индукции.

1. при $n=1$ это неравенство превращается в тождество

$1+a_1\geq 1+a_1 \Leftrightarrow 0\geq 0$, а это истинное неравенство.

2. Предположим, что рассматриваемое исходное неравенство выполняется для некоторого n, тогда, поскольку $\left(-1<a_i\leq 0; i=1,...,n+1\right)$, имеем следующую цепь преобразований:

$$\prod_{i=1}^{n+1}\left(1+a_i\right)=\left(1+a_n+1\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1+a_i\right)\geq\left(1+a_n+1\right)\left(1+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=1+a_n+1+\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{k+1}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k .$$

С другой стороны, принимаем во внимание, что $a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq 0$ в силу того, что

$a_{n+1} \leq 0$ и $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 0$. Таким образом, получили неравенство:

$\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k$, равносильное исходному соотношению при $n+1$.

Следовательно, индукцией по n неравенство доказано.

Задача 2.

Доказать, что

$$|\sin x| \leq n|\sin x|, n=1,2,... \quad (1)$$

Доказательство проведем индукцией по n.

1. при $n=1$ получим: $|\sin x| \leq |\sin x| \Leftrightarrow 0 \leq 0$, то есть равенство (1) верно.

2. допустим, что (1) выполняется для любого $k=1,2,...,n$. Значит,

$$|\sin(n+1)x| \leq |\sin(nx+x)| = |\sin nx\cos x + \cos nx \sin x \leq|$$

$$\leq \left[|a+b| \leq |a|+|b|; |\cos x| \leq 1; |\cos nx| \leq 1\right] \leq |\sin nx| + |\sin x| \leq$$

$$\leq n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|$$, таким образом

$|\sin(n+1x)| \leq (n+1)|\sin x|$, то есть исходное равенство справедливо также и при $n+1$, а значит, оно доказано.

Задача 3.

Доказать неравенство Бернулли:

$$(1+n)^n > 1+nh, \quad \text{где} \quad n=2,3,...,h>-1; h\neq 0 \quad (2)$$

Доказательство: докажем (4) индукцией по n.

1. при $n=2$ получим $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h \Leftrightarrow h^2 > 0$, а это неравенство истинно для любого $h \neq 0$, то есть неравенство (2) выполняется.

2. допустим, что (2) верно для любого $k = 2,...,n$, докажем, что оно верно и для $n+1$. Тогда имеем

$$\left(1+h\right)^{n+1}\left(1+h\right)^{n}\left(1+h\right) > \left(1+hn\right)\left(1+h\right) = 1+nh+h+nh^2 = 1+\left(n+1\right)h+nh^2 >$$

$1+\left(n+1\right)h$.Так как $(h+1) > 0; h \neq 0$, то

$\left(1+h\right)^{n+1} > 1+\left(n+1\right)h$, то есть соотношение (4) справедливо и при $n+1$, и, следовательно, неравенство Бернулли по индукции доказано.

Отметим особо, что в некоторых случаях для применения изложенного выше подхода к доказательству формул и соотношений необходимо модифицировать шаг 2: из гипотезы о том, что рассматриваемое неравенство справедливо для серии последовательных значений некоторого индекса (принимающего целые значения) от начального до произвольного *n* следует его истинность и для значения *n+1*; тогда на основе математической индукции оно доказано.

Список литературы:

1. Н.Я. Виленкин. «Индукция. Комбинаторика». Пособие для учителей. Москва «Просвещение», 1976.
2. А.Н. Колмогоров. Научно-методический журнал «Математика в школе». Статья «Алгебра и начала анализа. Метод математической индукции (стр.8)». №1, 1975.
3. О.А. Ажгалиев. Газета «Математика». Статья «Доказательство неравенств методом математической индукции». №23, 1995.
4. В.Н. Березин, Л.Ю. Березина. «Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике». Москва «Просвещение», 1985, стр. 176.
5. В.И. Семенов. Научно-методический журнал «Математика в школе». Статья «Об искусстве индуктивного предположения (стр.21)». №2, 1994.
6. В.Б. Лидский, Л.В. Овсянников. «Задачи по элементарной математике». Москва, Наука, 1969.