УДК 378

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ ФОРМУЛ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент
Липина Г.А., старший преподаватель
Николаев Ю.А., студент гр. АГс-161, VI курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В работе рассматривается метод доказательства различных соотношений и формул, основанный на математической индукции. Изложим основные этапы данного подхода. Он состоит из двух этапов:

1. проверяется, что доказываемое соотношение имеет место при начальном значении некоторого целочисленного индекса (фигурирующего в нем);

2. если из предположения, что оно справедливо при некотором фиксированном значении данного индекса вытекает его истинность для следующего значения, то тем самым обосновывается его справедливость и при произвольном значении данного индекса.

Проиллюстрируем описанный подход на конкретных примерах, выделяя для большей алгоритмической наглядности представленные выше этапы 1 и 2 метода математической индукции.

Задача 1.

Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\quad n=1,2,\ldots$$

Доказательство:

1. При $n=1$ получим

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1(1+1)}{2}=1\ \text{(истинно)}$$

т.е. при $n=1$ приведенное выше исходное равенство, очевидно, является истинным.

2. Предположим, что исходное равенство справедливо для некоторого n. Докажем, что оно верно и для $n+1$. Тогда с учетом предположения математической индукции запишем

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k(k+1)}{2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}=\frac{[n+1]([n+1]+1)([n+1]+2)}{6},$$

т.е. получили доказываемую формулу при $n+1$, а значит, по методу математической индукции она доказана.

Задача 2.

Доказать, что справедлива формула бинома Ньютона

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}=(a+b)^n \qquad (n=0,\ 1\ldots)$$

Доказательство:

1. при $n=0$ имеем следующее соотношение:

$$\sum_{k=0}^{0} C_0^k \frac{a^k}{b}=(a+b)^k,$$

а это возможно тогда и только тогда, когда $k=0$. Следовательно, $C_0^0=1$, т.е. данное равенство верно.

2. предположим, что оно верно при некотором n. Тогда, полагая, что в первой сумме $m=k+1$, а значит $k=m-1$, где $m=1,\ldots,n+1$, получим

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}=$$

$$=\sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n+1-m}+\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}=$$

=[в первой сумме заменим m на k , от этого сумма не изменится, затем в первой сумме выделим первое слагаемое, а во второй последнее слагаемое] =

$$=\sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^{k-1}+C_n^k\right)a^k b^{n+1-k}$$

$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{n+1-k}+\frac{1}{k}\right]=$$

$$=\frac{n!(n+1)}{(k-1)!(n-k)!(n+1-k)k}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=C_{n+1}^k.$$

Таким образом, имеем:

$$C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k \ .$$

Тогда, с учетом последнего тождества, получим следующую цепочку выкладок:

$$(a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n-k} \ =$$

$$\left[a^n=C_{n+1}^{n+1}a^{n+1}b \ ;b^{n+1}=C_{n+1}^{0}a^0 b^{n+1-0}\right]=\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n-k}.$$

В итоге имеем:

$$(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n-k},$$

то есть доказываемая формула верна и при *n+1*. Следовательно, по методу математической индукции она доказана.

Список литературы:

1. Н.Я. Виленкин. «Индукция. Комбинаторика». Пособие для учителей. Москва «Просвещение», 1976.

2. А.Н. Колмогоров. Научно-методический журнал «Математика в школе». Статья «алгебра и начала анализа. Метод математической индукции (стр.8)». №1, 1975.

3. О.А. Ажгалиев. Газета «Математика». Статья «Доказательство неравенств методом математической индукции». №23, 1995.

4. В.Н. Березин, Л.Ю. Березина. «Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике». Москва «Просвещение», 1985, стр. 176.

5. В.И. Семенов. Научно-методический журнал «Математика в школе». Статья «Об искусстве индуктивного предположения (стр.21)». №2, 1994.

6. В.Б. Лидский, Л.В. Овсянников. «Задачи по элементарной математике». Москва, Наука, 1969.