УДК.514

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ И КРИВЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Евтихеева А.Д., студент гр. СПб-212, I курс,
Слонов Е.А. студент гр. СПб-212, I курс,
Научный руководитель: Гоголин В.А., д.т.н., профессор
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачёва
г. Кемерово

Известна [1] формула вычисления расстояния между двумя параллельными прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (1) и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (2), имеющая вид:

$$d = \left|\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\right|, \qquad (1)$$

где $(x_0; y_0)$ координаты произвольной точки прямой (2).

В работе [2] получена формула для вычисления расстояния между прямой $y = kx + b$ и параболой $y - y_0 = a(x - x_0)$, имеющая вид:

$$d = \frac{1}{4|a|}\left|\frac{k^2 + 4akx_0 - 4ay_0 + 4ab}{\sqrt{k^2 + 1}}\right|.$$

В данной работе мы выведем формулы минимального расстояния от прямой линии до эллипса и гиперболы.

Для начала рассмотрим произвольный эллипс с центром в начале координат $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямую $y = kx + c$, построим их графики (рис. 1). Мы принимаем значения переменных и констант для второй четверти: $x < 0$, $y > 0$, $c > 0$, $k > 0$ – и третьей четверти: $x < 0$, $y < 0$, $c < 0$, $k < 0$.

Так как прямая и эллипс не пересекаются, то следующая система уравнений не должна иметь решений:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + c \end{cases}.$$

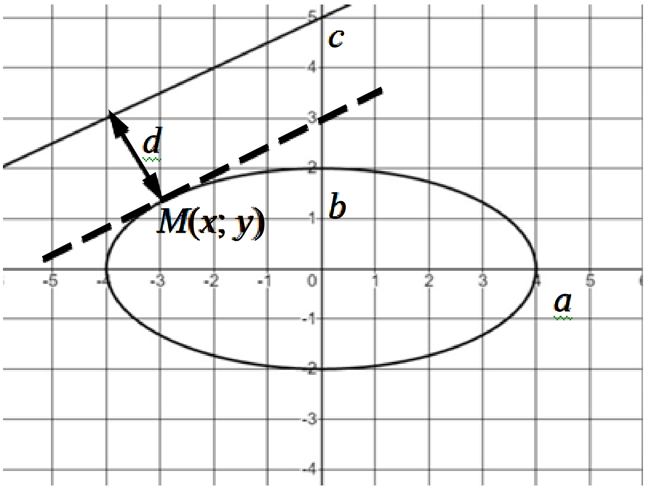

Рис. 1. Схема определения расстояния от параболы до прямой

Из геометрического смысла производной мы знаем, что производная равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке. Выразим y из каждой формулы и найдем их производные:

$$\begin{cases} y = kx + c \\ y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \end{cases},$$

$$\begin{cases} y' = k \\ y' = \mp \frac{bx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \end{cases}.$$

Выразим *x*, приравняв правые части уравнений, получим:

$$k = \mp \frac{bx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}},$$

$$x = \mp \frac{ka^2}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}.$$

Далее находим

$$y = \mp b\sqrt{1 - \frac{ka^2}{a^2k^2 + b^2}}.$$

Координаты точки $M(x; y)$ эллипса подставим в формулу (1) и получим:

$$d = \frac{\left|\mp k\frac{ka^2}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}} \mp b\sqrt{1 - \frac{k^2a^2}{b^2 + k^2a^2}} + c\right|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|\mp\sqrt{b^2 + k^2a^2} + c|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Таким образом, мы нашли формулу вычисления расстояния от эллипса с центром в точке (0; 0) до прямой линии, которая имеет вид:

$$d = \frac{|\mp\sqrt{b^2 + k^2a^2} + c|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

Знак $\mp$ в формуле стоит не случайно. Формулу со знаком «минус» нужно использовать в том случае, если $c \geq 0$, а со знаком «плюс» используем в противном случае.

Рассмотрим частные случаи.

Расстояние от горизонтальной прямой (k =0) до эллипса определяется по формуле $d = |\mp b + c|$.

Расстояние от прямой до окружности ($a = b$) вычисляется по формуле

$$d = \left|\mp a + \frac{c}{\sqrt{k^2+1}}\right|.$$

Рассмотрим общий случай расположения эллипса, когда центр эллипса имеет координаты (x_0; y_0). Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

При этом выполняется условие, что эллипс и прямая линия не пересекаются.

По аналогичному алгоритму действий, производим расчёты и приводим формулу к конечному виду:

$$d = \frac{|\mp\sqrt{b^2+k^2a^2} + kx_0 - y_0 + c|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Теперь рассмотрим гиперболу с центром симметрии в начале координат $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямую $y = kx + c$, построим их графики (рис. 2).

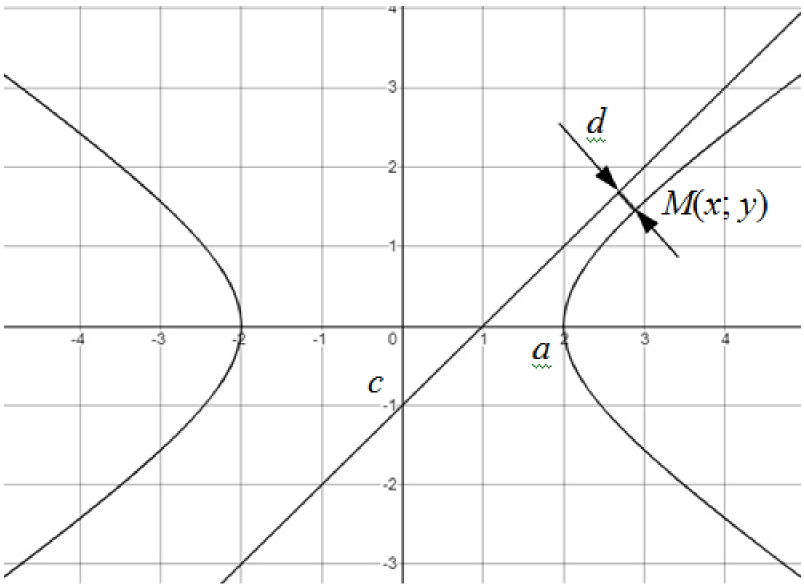

Рис.2. Схема определения расстояния от гиперболы до прямой

Мы принимаем значения переменных и констант для первой четверти: $x > 0$, $y > 0$, $c < 0$, $k > 0$ – и четвёртой четверти: $x > 0$, $y < 0$, $c > 0$, $k < 0$.

Следующая система уравнений не должна иметь решений:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + c \end{cases}.$$

Аналогично выразим y из каждой формулы и найдём производные этих функций:

$$\begin{cases} y = kx + c \\ y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \end{cases},$$

$$\begin{cases} y' = k \\ y' = \pm \frac{bx}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} \end{cases},$$

$$k = \pm \frac{bx}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}.$$

Отсюда выразим x и y:

$$x = \pm \frac{ka^2}{\sqrt{a^2k^2 - b^2}}, \quad y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2k^2 - b^2}}.$$

Координаты точки $M(x;\, y)$ гиперболы подставим в формулу (1) и получим:

$$d = \frac{\left| \pm k \frac{ka^2}{\sqrt{k^2a^2 - b^2}} \mp b\sqrt{\frac{k^2a^2}{k^2a^2 - b^2} - 1} + c \right|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|\pm\sqrt{k^2a^2 - b^2} + c|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Расстояния от гиперболы с центром симметрии в начале координат до прямой находится по формуле:

$$d = \frac{|\pm\sqrt{k^2a^2 - b^2} + c|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Формулу со знаком «минус» нужно использовать в том случае, если $c \geq 0$, а со знаком «плюс» используем в противном случае.

В частном случае при $k \to \infty$ прямая совпадает с осью Оy и $d = a$.

Таким же образом находим формулу расстояния для общего случая, когда гипербола имеет центр симметрии с координатами (x_0; y_0). Уравнения гиперболы имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

По аналогичному алгоритму действий, производим расчёты и получаем конечную формулу для расстояния между гиперболой и прямой:

$$d = \frac{|\pm\sqrt{k^2a^2 - b^2} + kx_0 - y_0 + c|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Вывод:

В данной работе впервые получены формулы для вычисления расстояния от эллипса и гиперболы до прямой линии. Данные формулы могут быть использованы при решении задач аналитической геометрии, а также будут полезны при решении прикладных инженерных задач. Также большой интерес представляет задача вычисления расстояния от точки до кривой второго порядка.

Список литературы:

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии линейной алгебры [Текст): учебник для студентов вузов / Д. В. Беклемишев. – М.: Физматлит, 2008.-312 с.

2. Булыгин И.А. Расстояние между параболой и прямой И.А. Булыгин, Н.О. Камышникова, А.В. Дягилева // В сборнике: Сборник материалов X Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с межд. участием «Россия молодая», 2018. С. 74804.1-74804.