УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Амангельдиев Ж., студент гр. 117-20, II курс
Научный руководитель: Халдыбаева И.Т., старший преподаватель
Ташкентский государственный технический университет
г. Ташкент

Один из методов решения дифференциальных уравнений является метод операционного исчисления, основанный на преобразовании Лапласа, целью которого является нахождение изображения по данному оригиналу и оригинала по данному изображению. Суть данного метода – переход от сложной математической модели к более простой.

Операционное исчисление – это один из методов математического анализа, который используется в решениях задач электротехники, механики, автоматики и так далее.

В курсе высшей математики в технических ВУЗах предлагается метод операционного исчисления для нахождения частного решения дифференциальных уравнений с нулевым начальным условием. И в теореме дифференцирования оригинала должно быть $x = 0$.

В этой статье рассматривается случай, когда x отличен от нуля, то есть $x = a$ $(a > 0)$.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение n –го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x) \tag{1}$$

при начальных условиях

$$y(a) = y_0, y'(a) = y_0', \ \ldots \ , \ y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)} . \tag{2}$$

Будем считать, что функция $f(x)$ и решение $y(x)$ уравнения (1) вместе с производными до n –го порядка включительно является оригиналами, тогда$f(x) \leftarrow F(p), \quad y(x) \leftarrow Y(p)$.

Выполним замену переменной: $x - a = t$отсюда$x = t + a$

Так как

$$f(x) = f(t + a),$$

$$y(x) = y(t + a),$$

то имеет место

$$\begin{cases} y'(x) = y'(t+a) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)}(x) = y^{(n)}(t+a) \end{cases}$$

В итоге имеем уравнение аналогичное дифференциальному уравнению (1), но с нулевыми начальными условиями:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t+a)$$

$$y|_{t=0} = y_0, \quad y'|_{t=0} = y_0', \qquad \dots. \; y^{(n-1)}|_{t=0} = y_0^{(n-1)}$$

Решая полученное уравнение операционным методом, найдем $y = y(t)$ и, произведя обратную замену переменной $t = x - a$, найдем решение уравнения (1) при начальных условиях (2).

Пример: Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 3y' - 4y = e^{2x}; \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 0;$$

Решение. Заменим переменную

$$t = x - 1 \quad \text{тогда} \quad x = t + 1;$$

$$y'' + 3y' - 4y = e^{2(t+1)}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$$

Если

$$y(t) \leftarrow Y(P),$$

то по теореме дифференцирования оригинала

$$y'(t) \leftarrow P \cdot Y(P) - y(0);$$

$$y''(t) \leftarrow P^2 \cdot Y(P) - P \cdot y(0) - y'(0).$$

Известно, что

$$e^{2x} => e^{2(t+1)} = e^{2t} \cdot e^2; \quad e^{2t} \cdot e^2 \leftarrow \frac{e^2}{P-2}.$$

Перейдем из дифференциального уравнения к операторному.

$$P^2 Y(P) - Py(0) - y'(0) + 3PY(P) - 3y(0) - 4Y(P) = \frac{e^2}{P-2};$$

$$Y(P) \cdot (P^2 + 3P - 4) - P - 3 = \frac{e^2}{P-2};$$

Отсюда

$$Y(P) = \frac{e^2 + P^2 + P - 6}{(P-2)(P+4)(P-1)} = \frac{A}{(P-2)} + \frac{B}{(P+4)} + \frac{C}{(P-1)};$$

Нетрудно найти:

$$A = \frac{e^2}{6}; \quad B = \frac{e^2+6}{30}; \quad C = \frac{4-e^2}{5};$$

и

$$Y(P) = \frac{e^2}{6} \cdot \frac{1}{P-2} + \frac{e^2+6}{30} \cdot \frac{1}{P+4} + \frac{4-e^2}{5} \cdot \frac{1}{P-1};$$

$$Y(P) \to y(t); \qquad y(t) = \frac{e^2}{6} \cdot e^{2t} + \frac{e^2+6}{30} \cdot e^{-4t} + \frac{4-e^2}{5} \cdot e^{t};$$

Чтобы найти $y(x)$, осуществим обратную замену

$$t = x - 1 \quad => \qquad y = \frac{e^2}{6} \cdot e^{2(x-1)} + \frac{e^2+6}{30} \cdot e^{-4(x-1)} + \frac{4-e^2}{5} \cdot e^{(x-1)};$$

$$y = \left(\frac{4 \cdot e^{-1}}{5} - \frac{e}{5}\right) \cdot e^x + e^4 \cdot \left(\frac{6+e^2}{30}\right) \cdot e^{-4x} + e^{2x} \cdot \frac{1}{6}.$$

Пусть требуется найти общее решение дифференциального уравнения (1). Поскольку в общем решении $y(0),\ y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ являются произвольными постоянными, обозначим их $C_1,\ C_2, \dots, C_n$ соответственно. Решение операторного уравнения $Y(p)$, а также его оригинал $y(x)$ содержат в себе произвольные постоянные $C_1,\ C_2, \dots, C_n$. Так как при любых значениях этих постоянных функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1), то она и есть общее решение дифференциального уравнения.

Рассмотрим вышеуказанный пример:

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' - 4y = e^{2x}$.

Решение.

$$P^2Y(P) - PC_1 - C_2 + 3PY(P) - 3C_1 - 4Y(P) = \frac{1}{P-2};$$

Найдем $Y(P)$ и разложим на простейшие дроби, чтобы найти оригинал:

$$Y(P) = \left(\frac{1}{30} + \frac{C_1 - C_2}{5}\right) \cdot \frac{1}{p+4} + \left(\frac{4C_1 + C_2 - 1}{5}\right) \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p-2}.$$

Произведём новую замену

$$\frac{1}{30} + \frac{C_1 - C_2}{5} = C_1^* \quad \text{и} \quad \frac{4C_1 + C_2 - 1}{5} = C_2^*,$$

и найдем оригинал:

$$y(x) = C_1^* e^{-4x} + C_2^* e^x + \frac{1}{6} e^{2x}.$$

Список литературы:

1. А.А. Бободжанов, М.А. Бободжанова, В.Ф. Сафонов «Высшая математика, Специальные главы» учебное пособие Москва 2018.
2. Б.А. Раззакова, И.Т. Халдыбаева, Х.А. Ахмедова “Операцион хисоб” методическое пособие для студентов инженерного дела Ташкент 2002.