

УДК 365

РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Глазков Ю. Ф., доцент кафедры СКВиВ
Холод Е. Р., студентка гр. УЗс-181, 4 курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева
г. Кемерово

Аннотация: в материалах данной статьи представлен обзор способа нахождения прогибов пластины методом конечных разностей. Рассмотрены основные особенности данного метода, которые необходимо учитывать при решении инженерных задач. Приведен расчет пластины при соблюдении равенства прогибов в косвенном и явном виде, составлены матрицы коэффициентов конечно-разностных уравнений и описаны основные выводы.

Ключевые слова: пластина, метод конечных разностей, матрица коэффициентов, симметричная матрица.

В современном строительстве пластинчатые системы находят широкое применение в качестве несущих и ограждающих конструкций. Применение пластин в качестве конструктивных элементов всегда сопровождается определением прогибов. Одним из численных методов нахождения прогибов является метод конечных разностей.

Суть МКР заключается в замене производных, содержащихся в дифференциальном уравнении, разностными схемами. Эта замена сводит решение дифференциального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются значения функции прогибов в узлах пластины [2, 3].

Одной из особенностей нахождения прогибов пластины МКР является контроль за правильностью составления конечно-разностных уравнений на этапе записи матрицы коэффициентов этих уравнений. Согласно основным принципам механики матрица коэффициентов должна получиться симметричной относительно главной диагонали, однако, при учете симметрии прогибов в явном виде, это условие не выполняется. Докажем это, выполнив расчет.

Пример расчета

Выполним расчет прямоугольной в плане пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, толщиной 0,1 м. Примем модуль упругости бетона $E = 3 \cdot 10^7$ кПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,2$. Пластина, вид закрепления и схема нагрузок представлена на рис. 1.


$$\underline{A} :=$$

$$\mathbf{B} :=$$

[illegible]

Значения прогибов в узлах сетки равны:

$w := \text{Isolve}(A, B) =$

	0
0	$1.904 \cdot 10^{-5}$
1	$2.896 \cdot 10^{-5}$
2	$3.18 \cdot 10^{-5}$
3	$2.896 \cdot 10^{-5}$
4	$1.904 \cdot 10^{-5}$
5	$2.929 \cdot 10^{-5}$
6	$4.522 \cdot 10^{-5}$
7	$4.99 \cdot 10^{-5}$
8	$4.522 \cdot 10^{-5}$
9	$2.929 \cdot 10^{-5}$
10	$1.904 \cdot 10^{-5}$
11	$2.896 \cdot 10^{-5}$
12	$3.18 \cdot 10^{-5}$
13	$2.896 \cdot 10^{-5}$
14	$1.904 \cdot 10^{-5}$

Полученная матрица коэффициентов получается симметричной относительно главной диагонали матрицы, то есть уравнения относительно узловых координат составлены верно.

А теперь рассмотрим решение этой же задачи, но с заданием симметрии в явном виде, то есть с учетом равенства прогибов в точках, расположенных на пластине симметрично относительно координатных осей (см. рис. 2).

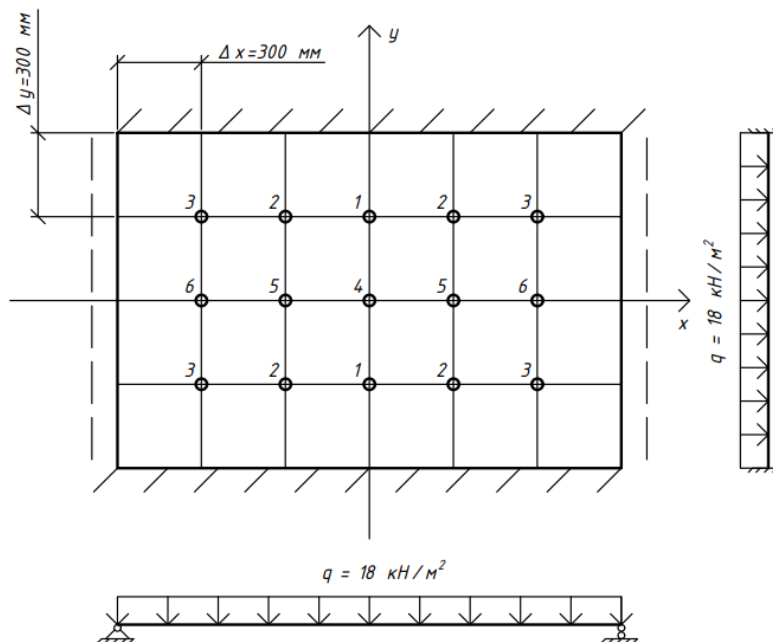


Рис. 2. Схема расчетной пластины

Матрица коэффициентов системы уравнений имеет вид:

$$A' := \begin{pmatrix} 22 & -16 & 2 & -8 & 4 & 0 \\ -8 & 23 & -8 & 2 & -8 & 2 \\ 1 & -8 & 21 & 0 & 2 & -8 \\ -16 & 8 & 0 & 20 & -16 & 2 \\ 4 & -16 & 4 & -8 & 21 & -8 \\ 0 & 4 & -16 & 1 & -8 & 19 \end{pmatrix} \quad B' := \begin{pmatrix} 5.6 \cdot 10^{-5} \\ 5.6 \cdot 10^{-5} \\ 5.6 \cdot 10^{-5} \\ 5.6 \cdot 10^{-5} \\ 5.6 \cdot 10^{-5} \\ 5.6 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Значения прогибов:

$$w' := \text{lsolve}(A', B') = \begin{pmatrix} 3.18 \times 10^{-5} \\ 2.896 \times 10^{-5} \\ 1.904 \times 10^{-5} \\ 4.99 \times 10^{-5} \\ 4.522 \times 10^{-5} \\ 2.929 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что при симметричной нумерации узлов сетки, матрица коэффициентов получается несимметричной относительно главной диагонали в явном виде, ее элементы необходимо делить на соответствующие значения. Причем преобразовать приходится те строки матрицы, в которых записаны коэффициенты уравнений узлов, лежащих на осях симметрии пластины. В данном случае строки, отвечающие точкам 1, 5, 6 необходимо разделить на 2, а строку, соответствующей точке 4 – на 4, так как она принадлежит двум перпендикулярным осям симметрии.

Заключение

При расчете пластины МКР без учета симметрии задачи наблюдается симметризация матрицы коэффициентов линейных алгебраических уравнений, что отвечает основным принципам механики и правильности составления уравнений. При этом получаем довольно громоздкие вычисления и повторяющиеся значения прогибов. При учете равенства прогибов в явном виде, матрица коэффициентов получается несимметричной, при этом значения прогибов при решении тем и другим способом получаются одинаковыми. Очевидно, что второе решение является более выгодным за счет сокращения количества составляемых уравнений, но при этом необходимо вести контроль за полученной матрицей коэффициентов – привести ее к симметричному виду, тем самым убедиться в правильности составления разностных уравнений.

Список литературы:

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. для строит. спец. Вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2002. – 400 с. – ISBN 5-06-004280-4. – Текст: непосредственный.
2. Вайнберг, Д. В. Расчет пластин / Д. В. Вайнберг, Е. Д. Вайнберг. – Киев.: Будивельник, 1970. – 437 с. – Текст: непосредственный.
3. Чуватов, В. В. Расчет пластинок на прочность и устойчивость методом сеток: Учебное пособие для студентов строительного и механического факультетов / В. В. Чуватов. – Свердловск: УПИ, 1972. – 106 с. – Текст: непосредственный.