

УДК 519.622.1

## РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Рогозин А.О., студент гр. ИВТ-81, IV курс

Научный руководитель: Шевченко А.С., канд. физ.-мат. наук, доцент  
Рубцовский индустриальный институт (филиал) ФГБОУ ВО «Алтайский  
государственный технический университет им. И.И. Ползунова»  
г. Рубцовск

Математическое моделирование многих задач механики, физики, химии и других областей науки и техники приводит к дифференциальным уравнениям. Дифференциальными называются уравнения, которые содержат одну или несколько производных [2].

Задача Коши (1) – одна из основных задач теории дифференциальных уравнений, которая состоит в нахождении решения (интеграла)  $y = y(x)$

дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , удовлетворяющего так называемым начальным условиям (начальным данным)  $y(a) = y_0$  [1-2]:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

В отличие от задачи Коши, в которой все необходимые условия задаются в начальной точке, в краевых задачах (2) часть условий задается в начальной точке, а другая часть условий – в конечной точке отрезка, на котором определено дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ \alpha_0 y'(0) + \beta_0 y(0) = y_0, \\ \alpha_1 y'(l) + \beta_1 y(l) = y_1. \end{cases} \quad (2)$$

Инженеры часто сталкиваются с дифференциальными уравнениями при разработке новых изделий или решении многих прикладных задач. Также дифференциальные уравнения используются в экономике, медицине, биологии, экологии и других областях науки.

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно разбить на следующие группы: графические, аналитические, приближенные и численные.

К сожалению, лишь очень немногие из них удастся решить без помощи вычислительных машин. Поэтому численные методы решения дифференциальных уравнений играют важную роль в практике инженерных расчетов. Более того, в настоящее время являются основным инструментом

при исследовании научно-технических задач, описываемых дифференциальными уравнениями.

Объектом исследования являются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Предметом исследования являются задача Коши и краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ).

Целью исследования является разработка приложения «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений».

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

- изучены численные методы для решения краевой задачи и задачи Коши для ОДУ;
- выполнен обзор программных продуктов;
- выполнено обоснование проектных решений по видам обеспечения;
- разработано приложение «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений».

Для решения дифференциальных уравнений можно использовать различные системы компьютерной алгебры (СКА или математические пакеты), которые изменялись на протяжении нескольких поколений [3]. Самые распространенные – MathCad, MatLab, Maple, Maxima и Mathematica, которые используют современный и удобный интерфейс пользователя, различные символьные и численные анализаторы, а также различные графические средства визуализации данных. Более того, СКМ не требуют от студентов и преподавателей знания языков программирования, позволяют экономить огромное количество времени на отладку программ, отслеживания ошибок. Основной проблемой использования СКА является то, что надо знать синтаксис и команды.

Так же существуют целые сайты с математическими разделами онлайн калькуляторов [5]. С помощью бесплатных математических онлайн – калькуляторов можно легко и быстро выполнять необходимые расчеты. Такие калькуляторы имеют существенный недостаток: при отсутствии интернета, доступ к ним запрещен.

Выполнив обзор готовых программных продуктов, можно сделать вывод о том, что готового решения не нашлось. В связи с этим принято решение о разработке собственного приложения.

Разработанное приложение предназначено для:

- ввода дифференциального уравнения и задания параметров;
- нахождения численного решения задачи Коши одношаговыми методами (метод Эйлера, усовершенствованные методы ломаных (метод хорд, усовершенствованный метод Эйлера-Коши, метод Эйлера-Коши с итерационной обработкой), метод Рунге-Кутты четвертого порядка);
- нахождения численного решения задачи Коши многошаговыми методами (метод Адамса, метод Милна);
- нахождения численного решения краевой задачи методами конечных разностей и прогонки;

- представления таблицы значений решения краевой задачи и задачи Коши в виде графиков функции;
- выгрузки численных решений в Microsoft Excel.

Задачи разрабатываемого приложения:

- интерфейс должен быть простым, удобным и приятным для визуального восприятия пользователя;
- приложение должно быть направлено на снижение временных затрат пользователя.

Для успешного функционирования разрабатываемого приложения необходимо наличие следующего технического обеспечения: процессор Intel Pentium Xeon Core Duo/Core 2 Duo, AMD Opteron Dual Core/Quad-Core; тактовая частота 1 ГГц или выше (рекомендуется 1,6 ГГц); 1024 МБ оперативной памяти; 80 МБ свободного дискового пространства; монитор с разрешением 1024x768 (или выше) с 32-битными (или больше) цветами, клавиатура, мышь.

При проектировании приложения использовались:

- среда разработки Microsoft Visual Studio 2019;
- EPPlus – библиотека для создания файлов Excel с помощью формата Office Open XML;
- NCalc2 – библиотека для вычисления математических выражений;
- OxyPlot – библиотека для построения графиков.

Microsoft Visual Studio – линейка продуктов компании , включающих программного обеспечения и ряд других инструментальных средств. Данные продукты позволяют разрабатывать как , так и приложения с , в том числе с поддержкой технологии , а также , веб-приложения [4, 6-7].

Выбор именно Microsoft Visual Studio 2019 [4,6], заключается в том, что он содержит набор инструментов для создания программного обеспечения: от планирования до разработки пользовательского интерфейса, написания кода, тестирования, отладки, анализа качества кода и производительности, быстрая компиляция, запускается на любой Windows.

Основные языки программирования VS 2019 – это Visual C#, Visual Basic, Visual C++, Visual F# (функциональный язык). Также доступны дополнения, позволяющие программировать в Visual Studio на языках Python, Rube и других. В качестве языка программирования был выбран C# [6].

Входной информацией для задачи Коши в разрабатываемом приложении будет:

- функция  $f(x, y)$  от двух переменных, служащая правой частью дифференциального уравнения;
- параметры краевых условий;
- число разбиения отрезка;
- точность вычислений;
- методы решения задачи Коши.

Входной информацией для краевой задачи в разрабатываемом

приложении будет:

- функции  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$ ;
- значения начала и конца исследуемого отрезка;
- начальное приближение;
- число разбиения отрезка;
- точность вычислений;
- методы решения краевой задачи.

Выходной информацией является:

- таблица значений, полученная при решении ОДУ и содержащая столбцы: номер шага  $i$ , значение  $x$ , значение  $y$ .
- график решения;
- предупреждения о неверно введенных данных;
- выгрузка полученных численных решений в MS Excel.

На рисунке 1 представлена форма для решения задачи Коши, которая содержит области: «Ввод функции», «Параметры», «Методы», «График решения», «Результаты вычислений».

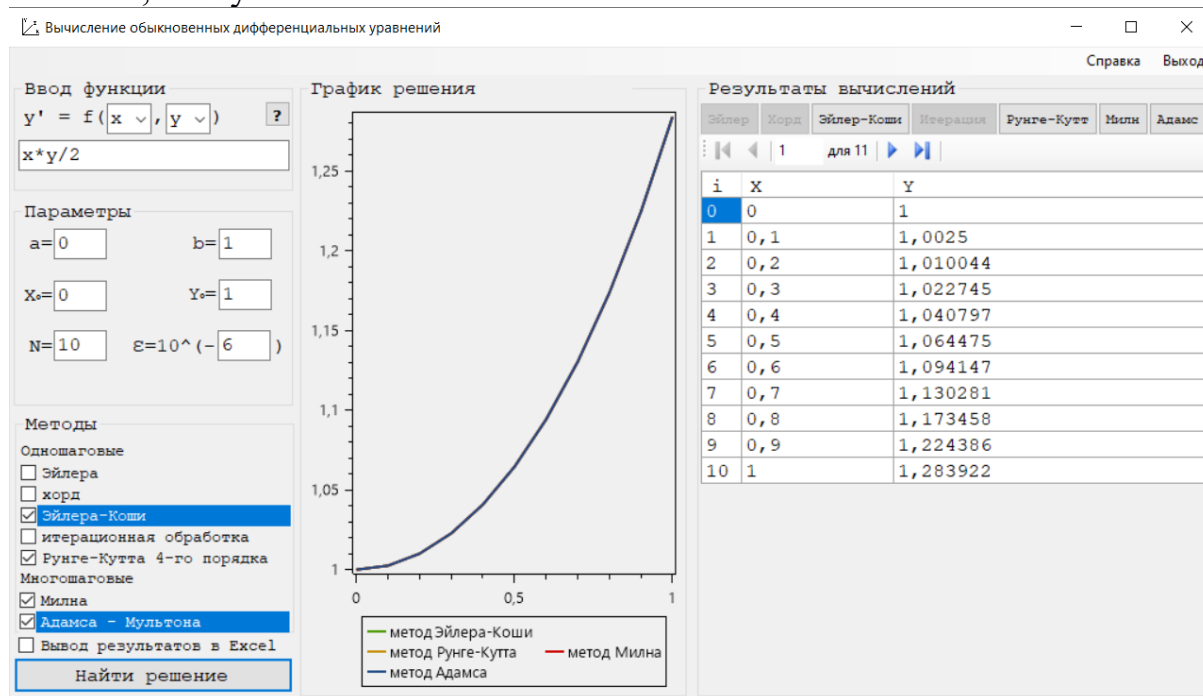



Рисунок 1 – Форма «Решение задачи Коши»

Рассмотрим работу приложения на примере. Вычислите интеграл дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{2}$ ,  $y(0)=1$  на отрезке  $[0,1]$  с шагом  $h=0.1$  [8].

Шаг 1. Введите функцию  $\frac{xy}{2}$ . Правила ввода содержатся в справке  (рисунок 2).

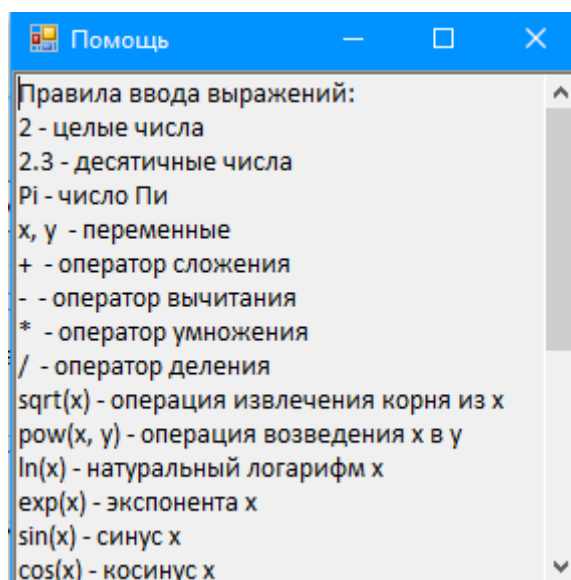


Рисунок 2 – Справка по вводу функции

Шаг 2. Задайте параметры:  $a=0$ ,  $b=1$ ,  $x_0=0$ ,  $y_0=1$ ,  $N=10$ ,  $\varepsilon=10^{-6}$ .

Шаг 3. Выберите методы.

Шаг 4. Нажмите кнопку «Найдите решение».

Шаг 5. Сохраните результаты. Для этого необходимо указать галочку в поле «Вывод результатов в Excel» и выбрать место сохранения файла (рисунок 3, рисунок 4).

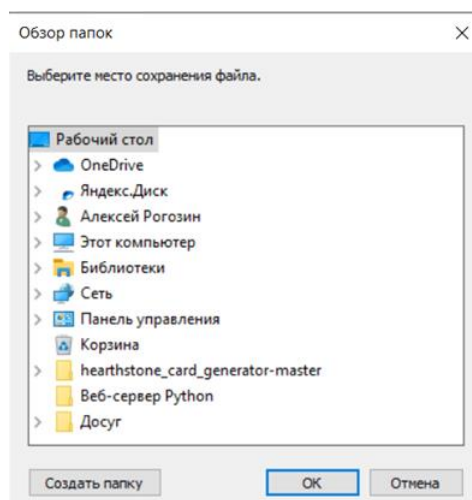


Рисунок 3 – Выбор места сохранения файла с результатами

| метод Эйлера-Коши |     |          | метод Рунге-Кутты |     |          | метод Милна |     |          | метод Адамса |     |          |
|-------------------|-----|----------|-------------------|-----|----------|-------------|-----|----------|--------------|-----|----------|
| i                 | X   | Y        | i                 | X   | Y        | i           | X   | Y        | i            | X   | Y        |
| 0                 | 0   | 1        | 0                 | 0   | 1        | 0           | 0   | 1        | 0            | 0   | 1        |
| 1                 | 0,1 | 1,0025   | 1                 | 0,1 | 1,002503 | 1           | 0,1 | 1,002503 | 1            | 0,1 | 1,002503 |
| 2                 | 0,2 | 1,010044 | 2                 | 0,2 | 1,01005  | 2           | 0,2 | 1,01005  | 2            | 0,2 | 1,01005  |
| 3                 | 0,3 | 1,022745 | 3                 | 0,3 | 1,022755 | 3           | 0,3 | 1,022755 | 3            | 0,3 | 1,022755 |
| 4                 | 0,4 | 1,040797 | 4                 | 0,4 | 1,040811 | 4           | 0,4 | 1,040811 | 4            | 0,4 | 1,040811 |
| 5                 | 0,5 | 1,064475 | 5                 | 0,5 | 1,064494 | 5           | 0,5 | 1,064494 | 5            | 0,5 | 1,064494 |
| 6                 | 0,6 | 1,094147 | 6                 | 0,6 | 1,094174 | 6           | 0,6 | 1,094174 | 6            | 0,6 | 1,094174 |
| 7                 | 0,7 | 1,130281 | 7                 | 0,7 | 1,130319 | 7           | 0,7 | 1,130319 | 7            | 0,7 | 1,130319 |
| 8                 | 0,8 | 1,173458 | 8                 | 0,8 | 1,173511 | 8           | 0,8 | 1,173511 | 8            | 0,8 | 1,173511 |
| 9                 | 0,9 | 1,224386 | 9                 | 0,9 | 1,22446  | 9           | 0,9 | 1,22446  | 9            | 0,9 | 1,22446  |
| 10                | 1   | 1,283922 | 10                | 1   | 1,284025 | 10          | 1   | 1,284025 | 10           | 1   | 1,284025 |

Рисунок 4 – Результаты, сохраненные в Excel

На рисунке 5 представлена форма для решения краевой задачи.

**Задача Коши** | Краевая задача

Ввод функции:  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

$y'' + 2y' + 3y = 5x$

Параметры:

$a = 0$   $b = 1$   
 $a_0 = 1$   $b_0 = 1$   
 $a_1 = 1$   $b_1 = 1$   
 $A = 1$   $B = 1$   
 $N = 1000$   $\varepsilon = 4$

Методы:

☐ конечных разностей  
☒ прогонки

☐ Вывод результатов в Excel

Найти решение

График решения дифференциального уравнения

Результаты вычислений

| i  | X     | Y      |
|----|-------|--------|
| 0  | 0     | 1,3846 |
| 1  | 0,001 | 1,3842 |
| 2  | 0,002 | 1,3838 |
| 3  | 0,003 | 1,3834 |
| 4  | 0,004 | 1,383  |
| 5  | 0,005 | 1,3826 |
| 6  | 0,006 | 1,3822 |
| 7  | 0,007 | 1,3818 |
| 8  | 0,008 | 1,3814 |
| 9  | 0,009 | 1,381  |
| 10 | 0,01  | 1,3805 |
| 11 | 0,011 | 1,3801 |
| 12 | 0,012 | 1,3797 |
| 13 | 0,013 | 1,3793 |
| 14 | 0,014 | 1,3788 |
| 15 | 0,015 | 1,3784 |
| 16 | 0,016 | 1,378  |
| 17 | 0,017 | 1,3775 |
| 18 | 0,018 | 1,3771 |
| 19 | 0,019 | 1,3766 |
| 20 | 0,02  | 1,3762 |
| 21 | 0,021 | 1,3757 |
| 22 | 0,022 | 1,3753 |
| 23 | 0,023 | 1,3748 |
| 24 | 0,024 | 1,3743 |
| 25 | 0,025 | 1,3739 |
| 26 | 0,026 | 1,3734 |

Рисунок 5 – Форма «Решение краевой задачи»

Разработанное приложение, быстро и надежно позволит численно решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Данное приложение может быть использовано студентами и преподавателями в учебном процессе при изучении теории численных методов и дифференциальных уравнений.

### Список литературы:

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 9-е изд. – Москва: Лаборатория знаний, 2020. – 637 с.

2. Буйначев, С. К. Применение численных методов в математическом моделировании: учебное пособие / С. К. Буйначев; под редакцией Ю. В. Песин. – Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. – 72 с.
3. Дьяконов, В. П. Maple 8 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. – Москва: СОЛОН-ПРЕСС, 2010. – 656 с.
4. Мейер, Б.В. Объектно-ориентированное программирование и программная инженерия / Б. В. Мейер. – 2-е изд., испр. – Москва: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2017. – 286 с.
5. Онлайн калькулятор по задаче Коши [Электронный ресурс] / Режим доступа: <https://math.semestr.ru/> / (Дата обращения 28.02.2021).
6. Подбельский, В. В. Программирование. Базовый курс C#: учебник для бакалавриата и специалитета / В. В. Подбельский. – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 369 с.
7. Черткова, Е. А. Программная инженерия. Визуальное моделирование программных систем: учебник для академического бакалавриата / Е. А. Черткова. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 168 с.
8. Шевченко, А. С. Численные методы: учебное пособие / А.С. Шевченко. – Москва : ИНФРА-М, 2022. – 381 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – DOI 10.12737/996207. – ISBN 978-5-16-014605-8. – Текст : электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/996207> (дата обращения: 06.02.2022).