

УДК: 550.837.3

## ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОПРОФИЛИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Сирота Д. Ю., к.т.н., доцент кафедры ТиГМ КузГТУ,

Шумилова С.А., студентка гр. ФПс-171, V Курс

Научный руководитель: Сирота Д. Ю., к.т.н., доцент.

Кузбасский государственный технический университет им. Т.Ф. Горбачева  
г. Кемерово

**Аннотация.** В статье рассматривается решение прямой и обратной задачи вертикального электропрофилирования неоднородного по своим электрическим характеристикам включения шарообразной формы. Определяются два его параметра: радиус и удельное электросопротивление. В качестве решателя используется метод наименьших относительных квадратов с адаптивным случайным поиском и регуляризацией А.Н. Тихонова.

**Ключевые слова.** ВЭП, обратная задача, адаптивный случайный поиск, метод А.Н. Тихонова, локация неоднородностей.

**Введение.** Вертикальное электрическое профилирование (ВЭП) – является модификацией более общего геофизического метода искусственного источника постоянного тока. Так же как и метод ВЭЗ метод ВЭП основан на измерении величины напряжения электрического поля с последующим анализом величины кажущегося удельного электрического сопротивления. Объектом исследования является локальная электропроводящая неоднородность, расположенная в однородном полупространстве; предметом исследования являются геометрические (размер) и электрические (КУЭС) характеристики неоднородности.

Технологическая суть метода ВЭП на постоянном токе заключается в следующем: с помощью двух питающих электродов  $A, B$  (батарейки) в толщу земли подаётся постоянный ток  $I$ , Ам, с помощью двух измерительных электродов  $M, N$  производится измерение напряжения (разности потенциалов в двух точках) электрического поля батарейки после прохождения тока через толщу земли. Повседневным аналогом описанной процедуры может служить измерение мультиметром напряжения бытовой батарейки, когда щупы  $M, N$  не напрямую подсоединяются к полюсам  $A, B$  батарейки, а по следующей схема: батарейка, два реостата различных омических характеристик. Далее происходит последовательное перемещение четырёхэлектродной установки вдоль заданного профиля. Так как расстояние между питающими и измерительными электродами сохраняется, то остаётся неизменной и глубина проникновения электрического тока в толщу земли.

Так же как и в случае вертикального электроразведки, в качестве анализируемой величины выступает не напряжение или напряжённость электрического поля, а виртуальная электрическая характеристика – КУЭС, которая определяется по формулам

$$(1) \quad \rho_K^T = \frac{2\pi r^2}{I} \frac{\partial U}{\partial r} \text{ и } \rho_K^П = k \frac{U_{MN}}{I_{AB}}$$

для модельных теоретических задач и экспериментальных измерений, где  $U_{MN}$  – разность потенциалов,  $I_{AB}$  – величина тока,  $k$  – коэффициент электрометрической установки, который вычисляется по общей формуле

$$k = \frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}}.$$

Таким образом, формируется следующая обобщённая постановка задач: прямая: получить расчётную формулу теоретической величины КУЭС электрического поля в рамках шарообразной неоднородности, расположенной в однородном проводящем полупространстве;

обратная: на основе экспериментальных значений КУЭС подобрать геометрические и электрические параметры шарообразной неоднородности в рамках используемой модели.

**Прямая задача.** Рассмотрим однородное изотропное полупространство с УЭС  $\rho_1$ , Ом\*м, в котором на некоторой глубине  $h$ , м расположен проводящий шар радиуса  $a$ , м с УЭС  $\rho_2$ , Ом\*м. На земной поверхности располагается трёхэлектродная установка  $AMN$ , где  $A$  – питающий электрод, а  $MN$  – электроды измерения перепада напряжения. Расстояние от центра шара  $Q$  до точки  $A$  –  $d$ , м; а до точки измерения потенциала  $M$  –  $r$ , м; полудлина установки –  $L$ , м [1, 2].

Так как физическая постановка задачи содержит шарообразную неоднородность, то мы можем использовать две альтернативные системы координат: сферическую в плоской постановке и полярную.

Рассмотрим первый случай. Уравнение Лапласа в такой системе координат с началом в центре шара  $Q$  и полярной осью  $AQ$  будет иметь вид:

$$2r \frac{\partial U}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + ctg(\varphi) \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = 0.$$

Так как в случае шара поле будет обладать азимутальной симметрией, то зависимостью потенциала от угла  $\psi$   $u = u(\psi)$  можно пренебречь. Тогда уравнение Лапласа примет вид:

$$(2) \quad 2r \frac{\partial U}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + ctg(\varphi) \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Применяя метод разделения переменных Фурье, представим решение этого уравнения в виде  $U = R(r)\Phi(\varphi)$ , где  $R = Ar^k + \frac{B}{r^{k+1}}$  и  $\Phi = P_k(\cos(\varphi))$  – полиномы Лежандра  $k$ -го порядка, которые определяются по рекуррентным формулам:  $P_0(t) = 1$ ,  $P_1(t) = t$ ,  $P_{k+2}(t) = \frac{2k+3}{k+2} \cdot t \cdot P_{k+1}(t) - \frac{k+1}{k+2} \cdot P_k(t)$ .

Таким образом, учитывая линейность уравнения Лапласа, его общее решение в сферической системе координат имеет вид:

$$(3) \quad U = R(r)\Phi(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( Ar^k + \frac{B}{r^{k+1}} \right) \cdot P_k(\cos(\varphi)).$$

Теперь рассмотрим постановку граничных условий применительно к нашей задаче. Будем нумеровать внешнее пространство цифрой 1, а внутреннее пространство шара цифрой 2. На границе шара должны выполняться условия склейки значений потенциала и плотностей поля

$$(4) \quad U_1(a, \varphi) = U_2(a, \varphi), \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1(a, \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2(a, \varphi)}{\partial r},$$

$$U_1|_{r \rightarrow 0} = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R}, \quad j_1|_{z=0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0.$$

Учитывая эти условия, получим следующее выражение для потенциала на границе первого слоя

$$(5) \quad U_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{r^{k+1}} \cdot P_k(\cos(\varphi)),$$

где

$$B_k = A_k \cdot \frac{a^{2k+1}}{d^{k+1}}, \quad A_k = \frac{I\rho_1}{\pi} \cdot \frac{(\rho_2 - \rho_1)k}{\rho_1 k + \rho_2(k+1)}.$$

Определяя напряжённость  $E$ , в/м через производную  $\frac{\partial U}{\partial R}$  и применяя формулу расчёта КУЭС  $\rho_K^T = \frac{2\pi R^2}{I} \frac{\partial U}{\partial R}$  получим формулу вида

$$(6) \quad \rho_K^T = \rho_1 \left[ 1 + 2R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_k a^{2k+1} (k+1)}{d^{k+1} r^{k+2}} \{ r \cdot P_k(\cos \varphi) - d \cdot P_{k+1}(\cos \varphi) \} \right],$$

где  $K_k = \frac{(\rho_2 - \rho_1)k}{\rho_1 k + \rho_2(k+1)}$  – коэффициент отражения, а взаимосвязи между расстояниями  $d$ ,  $r$ , углом  $\varphi$  и координатами точек  $x_A$ ,  $x_M$  относительно центра шара определяются как  $r^2 = x_M^2 + h^2$ ,  $d^2 = x_A^2 + h^2$ ,  $\cos \varphi = \frac{r^2 + d^2 - R^2}{2rd}$ ,  $x_A = x_M - R$ .

Из формулы (6) можно получить выражение для КУЭС в полупространстве, вмещающего шар, который находится в однородном электрическом поле, порождённым бесконечно удалённым электродом:

$$(7) \quad \rho_K = \rho_1 \left[ 1 + \frac{2K_1 a^3 (h^2 - 2x_M^2)}{(h^2 + x_M^2)^{5/2}} \right].$$

Отметим здесь, что в практике электропрофилирования возможно перемещения как всей четырёхэлектродной установки AMNB целиком, так и перемещение только измерительных электродов MN внутри питающего профиля АВ. Тот и другой варианты можно смоделировать с помощью формул (6, 7) с естественными изменениями в том, какую переменную из перечня  $x_A$ ,  $x_M$ ,  $R$  считать постоянной, а какую переменной.

**Обратная задача.** Предположим, что на поверхности земли произведено вертикальное электропрофилирование, в результате чего появились значения КУЭС, графическое расположение которых позволяет сделать предположение о наличии некоторой объёмной аномалии в нижней части полупространства. Будем считать, что геометрически эта аномалия достаточно хорошо замещается шаром. Требуется установить значения следующих трёх параметров: глубины залегания шара –  $h$ , м; радиус шара –  $a$ , м; величину отношения УЭС шара и вмещающей его среды –  $q$ . В качестве исходной информации будем использовать значения КУЭС в трёх экстремальных точках кривой КУЭС (левой, центральной, правой). Таким образом, требуется решить систему из трёх нелинейных уравнений с тремя неизвестными следующего вида

$$(8) \quad \rho_K^{\Pi} = \rho_K^T(a, h, q, x_M^j),$$

где  $x_M^j$ ,  $j=1,2,3$  – координаты точек измерения КУЭС;  $\rho_K^{\Pi}$  – измеренные в этих точках КУЭС [2].

Для уменьшения количества определяемых переменных воспользуемся выражением (7). Найдём от него производную и приравняем её к нулю:  $\frac{\partial \rho_K}{\partial x_M} = \frac{6\rho_1 K_1 a^3 x_M (2x_M^2 - 3h^2)}{(h^2 + x_M^2)^{7/2}} = 0$ . Решим полученное уравнение от-

носительно глубины залегания:  $h = \frac{\sqrt{6}}{3} x_M$ .

Так как экспериментальная кривая электропрофилирования может не обладать симметрией, то в качестве ориентировочной глубины можно взять среднее арифметическое глубин, рассчитанных по левой и правой экстремальной точке.

Таким образом, требуется подобрать только два параметра: радиус шара –  $a \in (0; h)$ , м, а так же величину отношения УЭС шара и вмещающей его среды –  $q \geq 0$ .

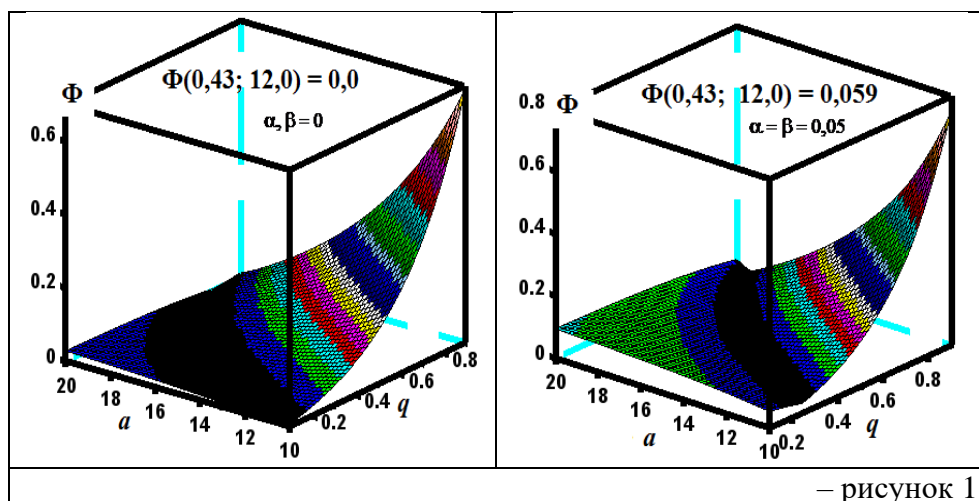
Рассмотрим **тестовый** пример. Предположим, что все аргументы функции известны:  $a=12$  м,  $h=25$  м,  $q=0,43$ . Тогда, взяв значения  $x_M^1 = -30,0$ ,  $x_M^2 = 0,0$ ,  $x_M^3 = 30,0$ , м и фиксированный разнос  $AM = 15$  м, определим, используя формулу (6), три теоретических значения КУЭС:  $\rho_1^\Pi = 1,0023$ ,  $\rho_2^\Pi = 0,9833$ ,  $\rho_3^\Pi = 0,9901$ . Будем использовать их в качестве замены реальных измеренных значений. Чтобы точнее смоделировать ошибки измерений, можно внести погрешности двух типов: определения координаты точки измерения  $x_{MP} = x_M [1 + \alpha \cdot (2 \cdot rand - 1)]$ ; вычисления КУЭС  $\rho_{KP}^\Pi(r) = \rho_K(r) \cdot [1 + \beta \cdot (2 \cdot rand - 1)]$ , где  $0 < rand < 1$  – случайное равномерно распределённое число,  $0 < \alpha, \beta < 1$  – коэффициенты погрешности.

Решать переопределённую систему из трёх уравнений (8) будем с помощью метода наименьших относительных квадратов (МНОК). Составим соответствующую целевую функцию

$$(9) \quad \Phi = \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{\rho_K^\Pi - \rho_K^T(a, h, q, x_M^j)}{\rho_K^\Pi} \right]^2.$$

с очевидными ограничениями на переменные вида  $a, h, q \geq 0$ ;  $h \geq a$ .

Приведём две поверхности целевой функции (рисунок 1), которые соответствуют двум вариантам погрешностей:  $\alpha, \beta = 0$  и  $\alpha = \beta = 0,05$  в интервалах для переменных  $10 < a < 20$ ,  $0,2 < q < 0,9$ .

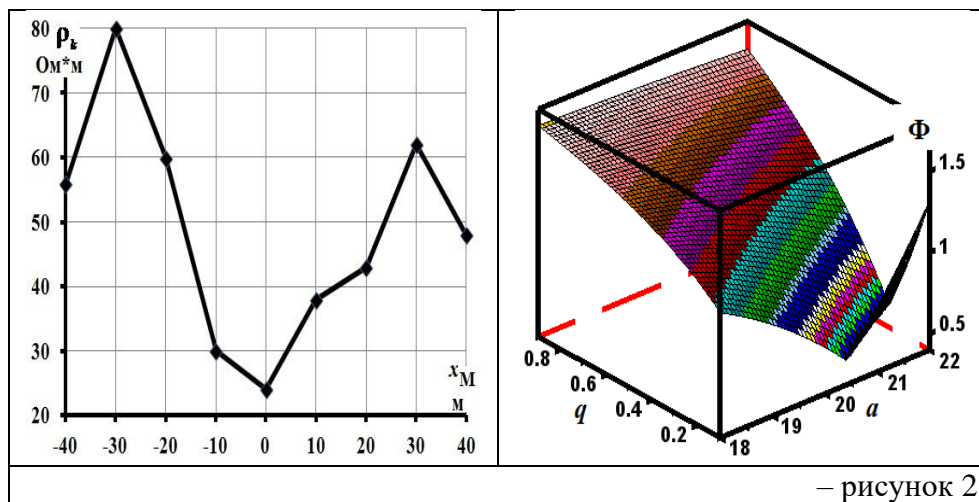


– рисунок 1

Анализ поверхностей функции (9) показывает, что эта функция является унимодальной с овражной структурой. Отметим здесь, что в случае традиционного МНК получаем функцию с ещё более широким оврагом.

Рассмотрим теперь **реальный** пример. В ходе измерений [3] были получены величины  $\rho_1 = 56$ ,  $\rho_K^1 = 80$ ,  $\rho_K^2 = 24$ ,  $\rho_K^3 = 62$  Ом·м;  $x_M^1 = -30,0$ ,  $x_M^2 = 0,0$ ,  $x_M^3 = 30,0$  м – экстремальные значения результатов электропрофилирования над обводнённой зоной.

Так как координата правой экстремальной точки равна  $x_M^3 = 30,0$ , то ориентировочная глубина залегания  $h = \frac{\sqrt{6}}{3} x_M = 24,5$  м. Величина полуразноса  $AM = 15$  м. Приведём график распределения экспериментальных значений КУЭС и поверхность целевой функции (9) (рисунок 2).



– рисунок 2

Для поиска её минимума будем использовать адаптивный метод двумерного случайного поиска [4]. Преимущество этого метода заключается в отсутствии необходимости вычислять частные производные целевой функции, а также уверенное движение по дну оврага в сторону экстремальной точки. Базовый алгоритм и расчётная программа этого метода были изучены и написаны в рамках дисциплины «Математическое программирование» на 3-м курсе специальности 21.05.05. «Физические процессы горного или нефтегазового производства» Горного Института ФГБОУ КузГТУ им. Т.Ф. Горбачёва.

Чтобы избежать влияния погрешностей измерения, а также снизить неоднозначность определения минимума функции в овраге, применяют метод регуляризации А.Н. Тихонова [5]. Суть метода в том, что к значениям целевой функции добавляют положительное слагаемое вида

$$(10) \quad \Omega = \gamma \cdot [a^2 + q^2]^{1/2},$$

где  $\gamma$  – положительный параметр регуляризации, стартовое и последующие значения которого определяются по формуле

$$(11) \quad \gamma_0 = \frac{\Phi(a_0, q_0)}{[q_0^2 + a_0^2]^{1/2}}, \quad \gamma_{k+1} = 0,85 \cdot \gamma_k,$$

При этом уменьшение параметра регуляризации производится во внешнем цикле, внутри каждого решается вышеуказанная задача на минимум.

Применяя его для второго примера, получим, что оптимальные значения составляют  $q_{\min} = 0,32$  и  $a_{\min} = 21,6$  м.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Заборовский А.И. Электроразведка / А.И. Заборовский // М. Госпотехиздат, 1963 г. – 429 с.
2. Шабанов Е.А., Сирота Д.Ю., Простов С.М., Вахьянов Е. Р. Диагностика зон загрязнения электроконтрастными экотоксикантами путем профилирования / Е.А. Шабанов, Д.Ю. Сирота, С.М. Простов, Е.Р.Вахьянов // Вестник КузГТУ. – 2021. – №6. – с. 48-56.
3. Караблин М.М., Сирота Д.Ю. Простов С.М. Прогноз устойчивости прибортового массива в глинистых грунтах четвертичных отложений с учётом влияния фильтрационных коллекторов на примере Бачатского угольного разреза/ М.М. Караблин, Д.Ю. Сирота, С.М. Простов // Изв. ВУЗов Горный Журнал, – 2021. – №3. – с. 36 -47.
4. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова // –М. Высшая школа, – 2005, – 544 с.
5. Тихонов А.Н. , Гласко В.Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах / А.Н. Тихонов, В.Б. Гласко // Журнал вычислительной математики и математической физики, – 1965, – т. 5, –№ 3, –с. 463-473.