

УДК: 550.837.3

## ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОЗОНДИРОВАНИЯ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Плотникова В.В., студентка гр. ФПс-171, V Курс  
Сирота Д. Ю., к.т.н., доцент кафедры ТиГМ КузГТУ  
Научный руководитель. Сирота Д. Ю., к.т.н., доцент  
Кузбасский государственный технический университет им. Т.Ф. Горбачева  
г. Кемерово

**Аннотация.** В статье рассматривается решение прямой и обратной задачи вертикального электротомондирования в случае двухслойной среды. Определяются два параметра: мощность слоя и удельное электросопротивление подстилающего слоя. В качестве решателя используется метод наименьших квадратов с адаптивным случайным поиском и регуляризацией А.Н. Тихонова.

**Ключевые слова.** ВЭЗ, обратная задача, адаптивный случайный поиск, метод регуляризации А.Н. Тихонова

**Введение.** Вертикальное электрическое зондирование (ВЭЗ) – это один из наиболее распространенных геофизических методов исследования структуры геологической среды. Метод основан на измерении и анализе величины напряжения электрического поля, порождённого искусственным источником постоянного тока. Объектом исследования является слоистый массив горных пород; предметом исследования являются геометрические (мощность) и электрические (КУЭС) характеристики слоёв [1,2,3].

Технологическая суть метода ВЭЗ на постоянном токе заключается в следующем: с помощью двух питающих электродов  $A$ ,  $B$  (батарейки) в толщу земли подаётся постоянный ток  $I$ , Ам, с помощью двух измерительных электродов  $M$ ,  $N$  производится измерение напряжения (разности потенциалов в двух точках) электрического поля батарейки после прохождения тока через толщу земли. Повседневным аналогом описанной процедуры может служить обычное измерение мультиметром напряжения бытовой батарейки, когда щупы  $M$ ,  $N$  напрямую подсоединяются к полюсам  $A$ ,  $B$  батарейки. Далее происходит последовательное увеличение расстояния между питающими электродами  $A$ ,  $B$ , в результате чего произойдёт увеличение глубины прохождения токов, что в свою очередь приведёт к получению информации о глубинном строении подповерхностного пространства.

В практике электроразведки, однако, анализируют не саму величину напряжения, а удельное электрическое сопротивление среды (УЭС – Ом·м),

по которой проходит известный ток  $I$ , Ам, порождая напряжение  $U$ , В. При этом, так как подземное пространство не является однородным, идеальным проводником, то вместо истинного УЭС исследуют некую виртуальную физическую величину кажущегося УЭС, которая обладает аналогичной размерностью, но при этом неявно учитывает неоднородность исследуемой среды.

Рассмотрим более детально, откуда эта величина появляется. Пусть дан точечный источник тока  $I$ , Ам. Величина напряжения в однородном безграничном пространстве такого источника равна  $U = \frac{\rho I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$ , но так как в геофизике исследуются поля в полупространстве (воздух является изолятором), то указанную величину напряжённости надо увеличить в два раза:  $U = \frac{\rho I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$ .

Вычисляя производную от этого выражения, найдём напряжённость электрического поля  $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\rho I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$ , откуда выразим УЭС среды  $\rho = \frac{2\pi r^2}{I} \frac{\partial U}{\partial r}$ . Если напряжения измеряются в заведомо неоднородных средах, то вычисленная по этой формуле величина УЭС как раз и будет кажущимся удельным электросопротивлением –  $\rho_K$ . Приведённая формула используется для вычисления КУЭС в теоретических расчётах при рассмотрении модельных задач, одну из которых мы рассмотрим ниже.

Чтобы вычислить экспериментальную величину КУЭС, используют формулу  $\rho_K = k \frac{U_{MN}}{I_{AB}}$ , где  $U_{MN}$  – разность потенциалов,  $I_{AB}$  – величина тока,  $k$  – коэффициент электрометрической установки, который вычисляется по общей формуле  $k = \frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}}$ .

Таким образом, формируется следующая обобщённая постановка задач: прямая: получить расчётную формулу теоретической величины КУЭС электрического поля в рамках некоторой слоистой среды; обратная: на основе экспериментальных значений КУЭС подобрать параметры слоистого пространства в рамках используемой модели.

**Прямая задача.** Пусть на поверхности однородного двухслойного с плоскопараллельными границами полупространства (сверху изолятор – воздух) имеется точечный источник постоянного тока, который порождает стационарное, независящее от времени, поле. Величина его потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа в трёхмерном пространстве, которое в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Применяя к нему метод разделения переменных Фурье, получим два частных решения  $R(r) = J_0(mr)$  – функция Бесселя нулевого порядка;  $Z(z) = Ae^{-mz} + Be^{mz}$ , где  $m$  – параметр, связанный с собственным значением задачи Штурма-Лиувилля формулой  $\xi = -m^2$ ;  $A, B$  – неизвестные коэффициенты. Так как параметр  $m$  может принимать произвольные положительные значения, то общее решение в каждом слое будет иметь вид:

$$(2) \quad U = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \int_0^{\infty} [Ae^{-mz} + Be^{mz}] J_0(mr) dm.$$

Чтобы определить конкретные значения коэффициентов, необходимо задать граничные условия, обусловленные геометрией пространства и физикой изучаемого явления. Во-первых, на контактной границе слоёв должны быть равны значения потенциалов и плотностей токов; во-вторых, так как над полупространством находится изолятор, то плотность тока на верхней границе должна быть равна нулю; в-третьих, вблизи источника тока потенциал поля должен совпадать с потенциалом точечного источника в полупространстве. Всё это приведёт к условиям:

$$(3) \quad U_1|_{z=h} = U_2|_{z=h}, \quad j_1|_{z=h} = j_2|_{z=h} \Rightarrow \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=h}.$$

$$(4) \quad U_2|_{r \rightarrow 0} = \frac{\rho_2 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}, \quad j_2|_{z=0} = 0 \quad \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

Учитывая эти условия, получим следующее выражение для потенциала на границе второго слоя

$$(5) \quad U_2 = \frac{\rho_2 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\rho_2 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{K \cdot e^{-2mh}}{1 - K \cdot e^{-2mh}} J_0(mr) dm.$$

Раскладывая подынтегральную дробь в ряд Тейлора и вычисляя производную, получим выражение для модуля напряжённости

$$(6) \quad \frac{\partial U_2}{\partial r} = \frac{\rho_2 I}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{r^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r \cdot K^k}{[r^2 + (2kh)^2]^{1.5}} \right],$$

где  $K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$  – коэффициент отражения границы второго слоя, которую и

будем использовать для теоретического вычисления КУЭС [1].

**Обратная задача.** Пусть в результате применения какой-либо установки был получен набор экспериментальных значений КУЭС –  $\rho_K^T$ . Требуется подобрать геометрические и электрические параметры слоистого пространства в рамках выбранной модели. Так как выше была разобрана двухслойная модель, то таким образом, требуется подобрать два параметра: коэффициент отражения  $K_{12}$  и мощность второго слоя  $h$ . С точки зрения математики для по-

иска этих неизвестных требуется решить нелинейную систему уравнений вида

$$(7) \quad \rho_K^T = \rho_K^{\Pi}(h, K),$$

где  $\rho_K^{\Pi} = \frac{2\pi r^2}{I} \frac{\partial U_2}{\partial r}$  – теоретическое значение КУЭС в рамках двухслойной среды.

Если одна из неизвестных величин оказывается известной, то требуется решить нелинейное уравнение относительно величины  $K$  или  $h$ .

Рассмотрим следующий тестовый пример. Предположим, что все параметры известны:  $h = 5$ , м;  $K = -0,7$ ;  $\rho_2 = 1$ , Ом·м;  $0 < r < 10$ , м. Измерения проведены с шагом 1 метр. Реальные измерения КУЭС заменим вычислёнными по формуле  $\rho_K^{\Pi} = \frac{2\pi r^2}{I} \frac{\partial U_2}{\partial r}$  с добавлением случайных погрешностей,

которые будут моделировать неточности измерений. Погрешности будем делить на два типа: погрешности в определении координаты точки измерения  $rp = r + \alpha \cdot h_r \cdot (2 \cdot rand - 1)$ , где  $h_r$  – шаг сетки; погрешности вычислений КУЭС  $\rho_K^{\Pi}(r) = \rho_K(r) \cdot \Delta$ , где величина  $\Delta = 1 + \beta \cdot (2 \cdot rand - 1)$ ,  $0 < rand < 1$  – случайное равномерно распределённое число,  $0 < \alpha, \beta < 1$  – коэффициенты погрешности.

Предполагая, что величины  $K$  и  $h$  неизвестны, будем их искать с помощью метода наименьших квадратов, сформировав следующую целевую функцию:

$$(8) \quad \Phi = \sum_k [\rho_K^T - \rho_K^{\Pi}(h, K)]^2 \rightarrow \min.$$

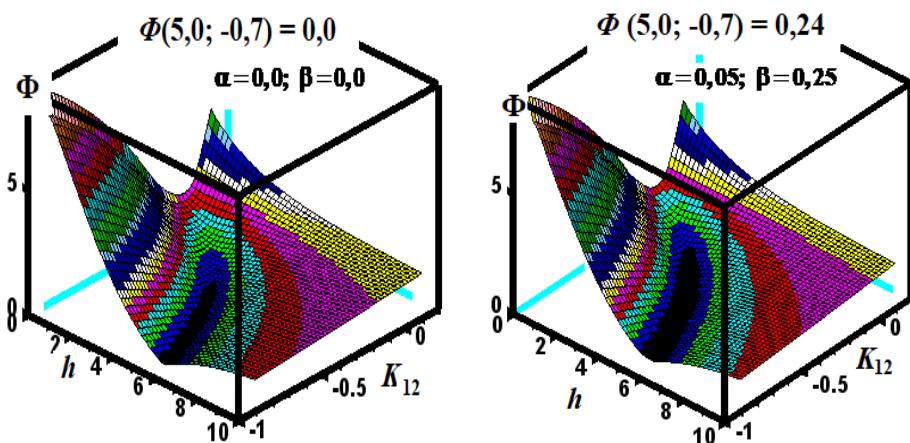
Построим поверхность этой функции на следующей области определения:  $0,0 < h < 10,0$  м;  $-0,9 < K < 0,1$ . Меняя величины погрешностей, можно отследить как именно они влияют на поверхность целевой функции. Приведём два варианта поверхностей, которые соответствуют следующим значениям погрешностей, где также укажем значение целевой функции в известном точном решении  $h = 5$ , м;  $K = -0,7$ : а)  $\alpha = 0,0; \beta = 0,0$ ; б)  $\alpha = 0,05; \beta = 0,25$ . Исследуя их, можно отметить следующие особенности:

1) целевая функция является унимодальной, то есть обладает единственной точкой минимума;

2) целевая функция обладает овражной структурой, то есть чем ближе поверхность приближается к точке минимума, тем более становится пологой.

Заметим, что указанные погрешности существенно влияют на структуру этого оврага: в случае погрешностей  $\alpha = 0,0; \beta = 0,0$  овраг минимальных размеров и  $\Phi(5,0; -0,7) = 0$ , а в случае погрешностей  $\alpha = 0,05; \beta = 0,25$  – овраг более протяжённый и значение  $\Phi(5,0; -0,7) = 0,0051$ . Так же можно отследить, что приборные погрешности измерений влияют на целевую функцию больше, чем погрешности положения измерительных электродов.

Поиск минимума целевой функции предлагается искать с помощью итерационного двумерного адаптивного случайного поиска [4]. Базовый алгоритм и расчётная программа этого метода были изучены и написаны в рамках дисциплины «Математическое программирование» на 3-м курсе специальности 21.05.05. «Физические процессы горного или нефтегазового производства» Горного Института ФГБОУ КузГТУ им. Т.Ф. Горбачёва. Применяя этот метод, получаем, что минимум функции располагается в точке  $h_{\min} = 4,43$ ,  $K_{\min} = -0,55$ , где значение целевой функции  $\Phi_{\min} = 0,0053$ . Как видим, оно не очень существенно отличается от значения этой же функции в истинной точке минимума.



– рисунок 1

Чтобы избежать влияния погрешностей измерения, а также снизить неоднозначность определения минимума функции в овраге, применяют метод регуляризации А.Н. Тихонова [5]. Суть метода в том, что к значениям целевой функции добавляют положительное слагаемое вида

$$(9) \quad \Omega = \gamma \cdot [h^2 + K^2]^{1/2},$$

где  $\gamma$  – положительный параметр регуляризации, стартовое и последующие значения которого определяются по формуле

$$(10) \quad \gamma_0 = \frac{\Phi(h_0, K_0)}{[h_0^2 + K_0^2]^{1/2}} \quad \gamma_{k+1} = 0,85 \cdot \gamma_k,$$

При этом уменьшение параметра регуляризации производится во внешнем цикле, внутри каждого решается вышеуказанная задача на минимум. Применяя данный метод, получаем, что  $h_{\min} = 4,18$ ,  $K_{\min} = -0,51$ , где значение целевой функции  $\Phi_{\min} = 0,0039$  [2, 3].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Заборовский А.И. Электроразведка / А.И. Заборовский // М. Госпетехиздат, 1963 г., – 429 с.

2. Шабанов Е.А., Сирота Д.Ю., Простов С.М., Вахъянов Е. Р. Диагностика зон загрязнения электроконтрастными экотоксикантами путем профилирования / Е.А. Шабанов, Д.Ю. Сирота, С.М. Простов, Е.Р.Вахъянов // Вестник КузГТУ. – 2021. – №6. – с. 48-56.
3. Караблин М.М., Сирота Д.Ю. Простов С.М. Прогноз устойчивости прибортового массива в глинистых грунтах четвертичных отложений с учётом влияния фильтрационных коллекторов на примере Бачатского угольного разреза/ М.М. Караблин, Д.Ю. Сирота, С.М. Простов // Изв. ВУЗов Горный Журнал, – 2021. – №3. – с. 36 -47.
4. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова // –М. Высшая школа, – 2005, – 544 с.
5. Тихонов А.Н. , Гласко В.Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах / А.Н. Тихонов, В.Б. Гласко // Журнал вычислительной математики и математической физики, – 1965, – т. 5, –№ 3, –с. 463-473.