

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Смирнов В.Г., к. ф.-м.н., доцент, кафедра физики ФФП;

Гуреев А. А., студент гр. ЭПб-191, I курс

Жданов В. А., студент гр. ЭПб-191, I курс

Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева
г. Кемерово

Введение

При проектировании технических устройств разной степени сложности необходимо одновременно учитывать требования к дизайну, функциональности, надёжности, потребительским качествам данного устройства. При этом значимость каждого из перечисленных аспектов зависит от типа устройства и решаемых задач.

Для простого предмета, например шкафа, на первый плана выходят требования дизайна и удобства использования. Размер и форма шкафа определяются количеством вещей, которые необходимо разместить в шкафу и объёмом свободного пространства в помещении, где будет находиться данный шкаф. И уже для каждого выбранного размера шкафа подбираются фурнитура и материалы стенок, обеспечивающие надёжность и функциональность данного устройства – шкафа.

Для сложных устройств, например, самолета или ракеты, такие параметры как форма и размеры, распределение масс внутри определяются, в первую очередь, физическими процессами, которые обеспечивают основную функцию данных устройств – способность летать.

Для акустических устройств, ещё один пример, из законов физики вытекает условие, что размер диафрагмы излучателя должен быть сравним с размером длины звуковой волны, на которой данный излучатель работает. Чем больше длина волны звука (чем ниже частота) тем больше должен быть размер колонки для данного диапазона.

В настоящей работе исследуются оптимальные параметры баллистического маятника, применяемого в промышленности и в лабораторных исследованиях как устройство для измерения скорости пуль. Анализируется возможность увеличения точности при измерении скорости пули данным маятником.

Краткое описание баллистического маятника

Рассматриваемый в нашей работе в качестве примера баллистический маятник (рис. 1) используется в лабораториях кафедры физики. На оси вращения 1 закреплён жёсткий стержень, на противоположном конце которого находится цилиндр 2 с пластилином. При попадании пули в цилиндр, она застревает в нём, после чего маятник отклоняется от положения равновесия. Исходя из измеренной по шкале 3 амплитуды отклонения, масс пули и цилиндра, длины подвеса рассчитывается начальная скорость пули.

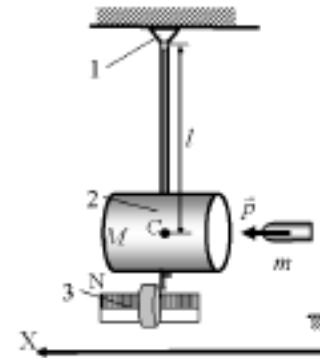


Рис. 1.
 Баллистический
 маятник

В момент попадания пули в маятник на систему не действуют горизонтальные силы, так что в проекции на ось OX (рис. 1) можно применить закон сохранения импульса. Пусть m , M – массы пули и цилиндра; v – начальная скорость пули; u – скорость после удара. Тогда закон сохранения импульса:

$$mv = (m + M)u. \quad (1)$$

Можно считать, что маятник получает скорость почти мгновенно и за время удара не успевает сместиться от положения равновесия. После удара маятник, двигаясь свободно, смещается от положения равновесия по горизонтали на величину x , при этом его центр тяжести поднимается на расстояние h вдоль вертикальной оси. Если l – длина подвеса, то связь горизонтального x и вертикального h отклонений маятника может быть получена из теоремы Пифагора для треугольника, гипотенузой в котором является длина подвеса в отклонённом состоянии, а катетами – вертикальная линия, проведенная через точку подвеса и горизонтальная линия, проведенная через центр масс: $l^2 = (l - h)^2 + x^2$. Решая это квадратное уравнение относительно h , и используя разложение радикала в ряд, получим следующее выражение:

$$h = \frac{x^2}{2l} \left(1 + \left(\frac{x}{2l} \right)^2 \right). \quad (2)$$

В первом приближении вторым слагаемым в скобке можно пренебречь, тогда $h = \frac{x^2}{2l}$.

На этапе отклонения маятник движется свободно, выполняется закон сохранения механической энергии:

$$(m + M) \frac{u^2}{2} = (m + M)gh. \quad (3)$$

Из выражений (1), (2), (3) получим формулу расчета скорости пули:

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot x. \quad (4)$$

Факторы, влияющие на погрешность измерения скорости пули

Принимая, что в выражении (4) определяемая скорость пули является функцией нескольких величин (m , M , l , x), оценим погрешность, которая возникает при неточном измерении данных величин. Обозначим $\varepsilon_{v,x}$, ε_x – относительная погрешность скорости, вызванная погрешностью измерения отклонения x , а также относительная погрешность отклонения. В соответствии с определением относительной погрешности и определением производной функции по параметру можно записать:

$$\varepsilon_{v,x} = \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x = \frac{x}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{x} = \frac{x \cdot v'_x}{v} \varepsilon_x. \quad (5)$$

Подставляя в (5) функцию (4) получим: $\varepsilon_{v,x} = \varepsilon_x$. Относительные погрешности есть положительные величины, они берутся по модулю. Проведя аналогичные (5) действия для остальных величин (m , M , l , x) получим следующие соотношения:

$$\varepsilon_{v,x} = \varepsilon_x; \quad \varepsilon_{M,x} = \frac{M}{m + M} \varepsilon_M; \quad \varepsilon_{m,x} = \frac{M}{m + M} \varepsilon_m; \quad \varepsilon_{v,l} = \frac{1}{2} \varepsilon_l. \quad (6)$$

Здесь относительные погрешности обозначены – символы с одним индексом: ε_l , ε_M , ε_m – это относительные погрешности величины, стоящей в индексе, а символы с двумя индексами: $\varepsilon_{v,l}$, $\varepsilon_{v,M}$, $\varepsilon_{v,m}$ – это относительная погрешность измерения скорости, вызванная погрешностью величины, стоящей в индексе. Результирующая погрешность определения скорости, в соответствии с правилом сложения погрешности независимых измерений, определяется следующим образом:

$$\varepsilon_v = \sqrt{\left(\frac{M}{m + M} \varepsilon_M \right)^2 + \left(\frac{M}{m + M} \varepsilon_m \right)^2 + \varepsilon_x^2 + 0.25 \cdot \varepsilon_l^2}.$$

В качестве оценки, полагая, что под радикалом каждое из слагаемых имеет примерно одинаковое значение, а суммарная относительная погрешность $\varepsilon_v = 1\%$, каждой из относительных погрешностей, перечисленных в (6) можно присвоить значение:

$$\varepsilon_{v,x} = \varepsilon_{v,M} = \varepsilon_{v,m} = \varepsilon_{v,g} = \varepsilon_{v,l} = 0,5\% . \quad (7)$$

В качестве характерных параметров установки примем $m = 0.05\text{кг}$, $M = 2.4\text{кг}$, $l = 1.0\text{м}$ и рассчитаем абсолютную погрешность измерений, которая требуется в этом случае для каждой из величин: $\Delta m = 0.00026\text{кг}$, $\Delta M = 0.012\text{кг}$, $\Delta l = 0.01\text{м}$. Приведенные значения позволяют сравнить при какой абсолютной ошибке измерения массы пули, массы маятника и длины подвеса вклад в погрешность измерения скорости от каждой из этих величин будет одинаков. По всем величинам такая точность вполне достигается в условиях рассматриваемой установки. Для используемого значения ускорения свободного падения отличие от табличного значения должно быть на порядок меньше 1 %, это достигается при численном значении в диапазоне $g = 9.80 - 9.81\text{м/с}^2$.

Таким образом, лимитирующей величиной, относительная погрешность которой определяет погрешность измерения скорости пули, является измеряемое отклонение маятника вдоль горизонтальной оси после попадания в него пули. Измерение отклонения маятника вычисляется как разность между начальным и конечным положением указателя 3 (рис. 1), так что при каждом измерении возникает абсолютная ошибка $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1\text{мм}$. Эти измерения независимы, поэтому $\Delta x = \sqrt{2}\Delta x_1 = 1.4\text{мм}$. В свою очередь, фактическое абсолютное значение отклонения в условиях нашей установки лежит в диапазоне от 25 до 75 миллиметров. Этому соответствует относительная ошибка измерения отклонения, в диапазоне от 5,6 до 1,9 %. Оба этих числа значительно больше требуемой относительной погрешности в 0.5% для величины отклонения.

Уменьшить относительную погрешность измерения отклонения можно за счет изменения параметров установки таким образом, чтобы амплитуда отклонения маятника увеличилась. При этом необходимо следить, чтобы погрешность формулы (2) все еще оставалась на приемлемом уровне. Примем, что эта погрешность, приведенная к конечному значению скорости, должна быть менее 0,2 %, т. е.:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{x}{2l}\right)^2} \leq (1 + 0.002), \text{ или } x \leq 0.13l . \quad (8)$$

При длине подвеса $l = 1.0\text{м}$ возникает ограничение $x \leq 13\text{мм}$. В существующей установке данная граница находится вблизи фактически наблюдаемых величин отклонения. Расширение данной границы произойдет, если мы увеличим длину подвеса. При этом одновременно с увеличением длины подвеса возрастет и отклонение маятника. Если принять, что масса пули и её

начальная скорость фиксированы, то из (1), (2), (3) получим зависимость величины отклонения x от длины подвеса l в виде:

$$x = \frac{mv}{m + M} \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (9)$$

Увеличение длины подвеса в два раза, при той же скорости летящей пули ведёт к возрастанию отклонения x в $\sqrt{2}$ раз. При этом остаются прежними условия (8) выхода за границу применения формулы (4). При увеличении в два раза длины подвеса максимальный допустимый диапазон изменения отклонения также увеличивается в два раза, так что возникает небольшой запас по увеличению величины x . Поэтому отклонение маятника может быть ещё увеличено примерно в $\sqrt{2}$ раз, но теперь уже за счёт уменьшения массы маятника M . Мы считаем, что $M \gg m$.

Таким образом, увеличение длины подвеса в два раза с одновременным уменьшением массы маятника в $\sqrt{2}$ раз приведёт к двукратному уменьшению погрешности при измерении скорости пули.

В существующей установке массы пуль варьируются в диапазоне от 25 до 100 грамм, т. е. самая легкая пуля имеет массу в четыре раза меньшую, чем самая тяжелая пуля, при этом скорости пуль отличаются только примерно в полтора раза. Поэтому ещё одним способом повышения точности измерений является варьирование массы маятника таким образом, что при измерении скорости самой легкой пули массу маятника M делать меньше, а для тяжелых пуль массу маятника делать больше, увеличивая отклонение, но оставаясь в рамках допустимого диапазона. Предполагая, что масса пули и её начальная скорость примерно известны, массу маятника можно уменьшить, но так, чтобы оставалось справедливым полученное из (8) и (9) соотношение:

$$\frac{mv}{(m + M)\sqrt{gl}} \leq 0.13. \quad (10)$$

Заключение

Для баллистического маятника уменьшение погрешности измерения в k раз может быть достигнуто за счет одновременного увеличения длины подвеса в k раз и уменьшения массы маятника в \sqrt{k} раз.

Дальнейшее повышение точности измерений может быть достигнуто за счет варьирования массы маятника M в зависимости от импульса летящей пули.

Список литературы

1. Механика. Кинематика и динамика поступательного и вращательного движения : лабораторный практикум К-402.1 по дисциплине "Физика" для технических специальностей и направлений подготовки всех форм обучения / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева", Кафедра физики ; составитель И. С. Елкин. – Кемерово : КузГТУ, 2020. – 37 с. – URL: <http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=5228>. – Текст : непосредственный + электронный.