УДК 532.546.519.517

К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬРАЦИИ ФЛЮИДОВ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Токтамуратов Т. А., студент гр. №141 АУТПП, II курс.
Научный руководитель: Каюмов Ш., к.ф.-м.н., доцент
Ташкентский государственный технический университет
им. И. Каримова,
г. Ташкент

Рассмотрим задачу вытеснения одной фазы другими в полукубическом пространстве, который можно рассмотреть, как некоторый полуоткрытый параллелепипед находящийся в подземных пористых средах. Предполагается что, начальное давление в пласте всюду постоянно и в начальный момент времени в среде находится только один тип флюида. Если с начального момента времени в пласт закачивается сжимаемый тип флюида, то в среде образуется двухфазная зона с неизвестными подвижными границами между этими фазами. Считается что зона смеси отсутствует, то есть происходит поршневое вытеснение, среда однородная, пористость постоянная, закачиваемая фаза идеальная, вторая фаза несжимаема. Математическая постановка этой задачи в условиях одномерности формулируется так:

Необходимо найти непрерывную функцию

$u_i(x,t)$ и $l(t)$ из следующей дифференциально краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_i hb}{\mu_i}\varphi(u,\beta)\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) = m(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad x \in D_i, \ \ t > 0, \tag{1}$$

начальное условие $$U(x,0) = U_0(x), \tag{2}$$

краевое условие $$\frac{k_1 hb}{\mu_1}\varphi(u,\beta)\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=x_0} = q_0(t), \tag{3}$$

$$u_2(x,t)|_{x\to\infty} = u_0(x), \tag{4}$$

а так же условия на подвижной границе раздела $x = l(t)$

$$u_1(x,t)|_{x=l(t)-0} = u_2(x,t)|_{x=l(t)+0}, \tag{5}$$

$$\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=l(t)-0} = \frac{k_2}{\mu_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=l(t)+0}, \tag{6}$$

$$m\delta\frac{dl}{dt} = -\frac{k_2}{\mu_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=l(t)+0}, \qquad l(0) = 0, \tag{7}$$

Здесь $D_1 = \{x;\ x_0 \le x \le l(t)\},\ D_2 = \{x; l(t) < x < \infty\},\ i = 1,2$

$k_i, h, b, \mu_i, m, \delta$ параметры среды и флюида [1-3].$\varphi(u,\beta)$–функция характеризующие структурированности среды и флюидов ньютоновских и неньютоновских сред [1,2].

Для построения решения задачи (1) – (7), предположим, что эти параметры в своей области определений постоянны или сохраняют переменности в определенных диапазонах и заранее заданы.

Вводя новые замены переменных $u_i = \bar{u}_i \cdot u_0,\;\; x = \bar{x} \cdot L\,,\;\; t = \bar{t} \cdot \frac{L^2}{d}$,

$$q_0 = \overline{q_0} \cdot kb \cdot \frac{u_0}{\mu}, \qquad l(t) = \bar{l}(t) \cdot L, \qquad \varphi(u,\beta) = \bar{\varphi}\left(\bar{u},\bar{\beta}\right) \cdot æ,$$

придем к следующей упрощенной задаче.

$$æ_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad x \in D, \tag{8}$$

с начальными

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = u_0, \tag{9}$$

краевыми

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=0} = c_0 q_0(t), \qquad u_2(x,t)|_{x\to\infty} \to u_0(x), \tag{10}$$

а также условиями на подвижной границе $x = l(t)$

$$u_1(x,t)\;|_{x=l-0} = u_2(x,t)|_{x=l-0.} \tag{11}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=l-0} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=l+0,} \tag{12}$$

$$\frac{dl}{dt} = -k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=l+0,} \qquad l(0) = 0. \tag{13}$$

Здесь коэффициенты k_1, k_2, $æ_i$, c_0 содержат в себе квазилинеаризованные параметры задачи (1) - (7) ориентированной на возможности построения решения задач.

В работе [1-3] для уравнения (1) при $i = 1$, путем введения переменной **ξ**=**ξ**(x,t) показаны условия при которых уравнения в частных производных второго порядка переходит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, при $\xi = x \cdot t^{-\frac{1}{2}}$.

Пусть $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$., $l(t) = \alpha\sqrt{æt}$, $q_0(t) = q \cdot t^{-\frac{1}{2}}/c_0$, Подставляя их в задачи(8)-(13), получим

$$\frac{d^2u_1}{d\xi^2}+\frac{\xi}{2}\frac{du_1}{d\xi}=0,\quad 0\le\xi\le\bar{\xi}\quad, \tag{14}$$

$$\frac{d^2u_2}{d\xi^2}+\frac{a^2\xi}{2}\frac{du_2}{d\xi}=0,\bar{\xi}\le\xi<\infty\quad, \tag{15}$$

при этом условии (9) примет вид

$$u|_{\xi\to\infty}=1, \tag{16}$$

условия (10) на краях

$$\frac{du_1}{d\xi}|_{\xi=0}=q,\qquad u_2|_{\xi\to\infty}\to 1, \tag{17}$$

и на границе раздела $\bar{\xi}=\alpha\sqrt{æ}$, (18)

$$u_1(\xi)|_{\xi=\bar{\xi}-0}=u_2(\xi)|_{\xi=\bar{\xi}+0}\ ,$$

$$\frac{du_1}{d\xi}|_{\xi=\bar{\xi}-0}=\tilde{C}\frac{du_2}{d\xi}|_{\xi=\bar{\xi}+0};\frac{du_2}{d\xi}|_{\xi=\bar{\xi}+0}=-\frac{m\alpha\sqrt{æ}}{2\tilde{C}} \tag{19}$$

Решение уравнения (15) имеет вид

$$u_2(\xi)=c_1\boldsymbol{\varphi}(\xi)\quad+c_2. \tag{20}$$

Коэффициенты C_1 и C_2 постоянные определяемые из граничных условий.

$\boldsymbol{\varphi}(\xi)=\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi}\ell^{-\theta^2}\,d\xi$ – интеграл вероятности, табулированная функция [4].

Из (17) и (20) находим

$$c_1\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+c_2=1,$$

а из (19) и (20)

$$\frac{du_2}{d\xi}|_{\xi=\bar{\xi}}=c_1\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\ell^{-\alpha^2æ}=-\frac{\alpha\sqrt{æ}}{2\tilde{C}}\,.$$

Значит

$$c_1=-\frac{a\sqrt{\pi}\alpha\sqrt{æ}}{4\tilde{c}\,\ell^{-a^2æ}}\qquad\text{и}\qquad c_2=1+\frac{a\sqrt{\pi}\alpha\sqrt{æ}}{4\tilde{c}\,\ell^{-a^2æ}}.$$

Тогда (20) примет вид

$$u_2(\xi) = 1 + \frac{\alpha\sqrt{\pi}\alpha\sqrt{æ}}{4\tilde{c}\,\ell^{-\alpha^2 æ}}[1 - a\varphi(\xi)]. \tag{21}$$

Учитывая (18) имеем

$$u_1(\xi) = 1 + \frac{\alpha\sqrt{\pi}\alpha\sqrt{æ}}{4\tilde{c}\,\ell^{-\alpha^2 æ}}\left[1 - a\varphi\left(\bar{\xi}\right)\right]. \tag{22}$$

Из (21) и (19) получим

$$\frac{du_1}{d\xi}\Big|_{\xi=\bar{\xi}} = \frac{-c\alpha\sqrt{æ}}{2\tilde{c}} = -\frac{\alpha m æ\sqrt{æ}k_2}{2k_2 u_0} \tag{23}$$

для уравнения (14) краевые условия (22). Решение уравнения (9) представим в виде

$$u_1(\xi) = b_1\int_0^{\xi}\ell^{-\frac{\xi^2}{4}}\,d\xi + b_2\ , \tag{24}$$

где b_1 и b_2 определяется из краевых условий (17), в результате чего имеем

$$b_1 = q,$$

Тогда (19) запишется так:

$$u_1(\xi) = q\int_0^{\xi}\ell^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi + b_2. \tag{25}$$

Так как на границе раздела известно $u_1\left(\bar{\xi}\right)$, то найдем константу b_2

$$q\int_0^{\bar{\xi}}\ell^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi + b_2, = 1 + \frac{\alpha\sqrt{æ}\sqrt{\pi}}{4\tilde{c}\ \ell^{-\alpha^2 æ}}\left[1 - a\varphi\left(\bar{\xi}\right)\right].$$

Отсюда значение b_2 подставим в (25) и получим

$$u_1(\xi) = q\int_0^{\xi}\ell^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi + \frac{\alpha\sqrt{æ}\pi}{4\tilde{c}\ \ell^{-\alpha^2 æ}}\left[1 - a\phi\left(\bar{\xi}\right)\right]. - q\int_0^{\alpha\sqrt{æ}}\ell^{-\frac{\eta^2}{4}}d\eta + 1.$$

Дифференцируя (24) с учетом $b_1=q$, а также при $\xi = \bar{\xi} = \alpha\sqrt{æ}$,

получим
$$\frac{du_1}{d\xi}\Big|_{\xi=\bar{\xi}} = q\cdot\ell^{-\frac{\alpha^2 æ}{4}}. \tag{26}$$

С учетом (23), (26) получим трансцендентное уравнение относительно параметра α.

$$-\frac{c\alpha\sqrt{æ}}{2\tilde{c}} = q\ell^{-\frac{\alpha^2 æ}{4}},$$

Или (27)

$$\alpha = g \cdot \ell^{-\frac{a^2 æ}{4}},$$

$$g = -\frac{2\tilde{c}q}{c\sqrt{æ}} \quad .$$

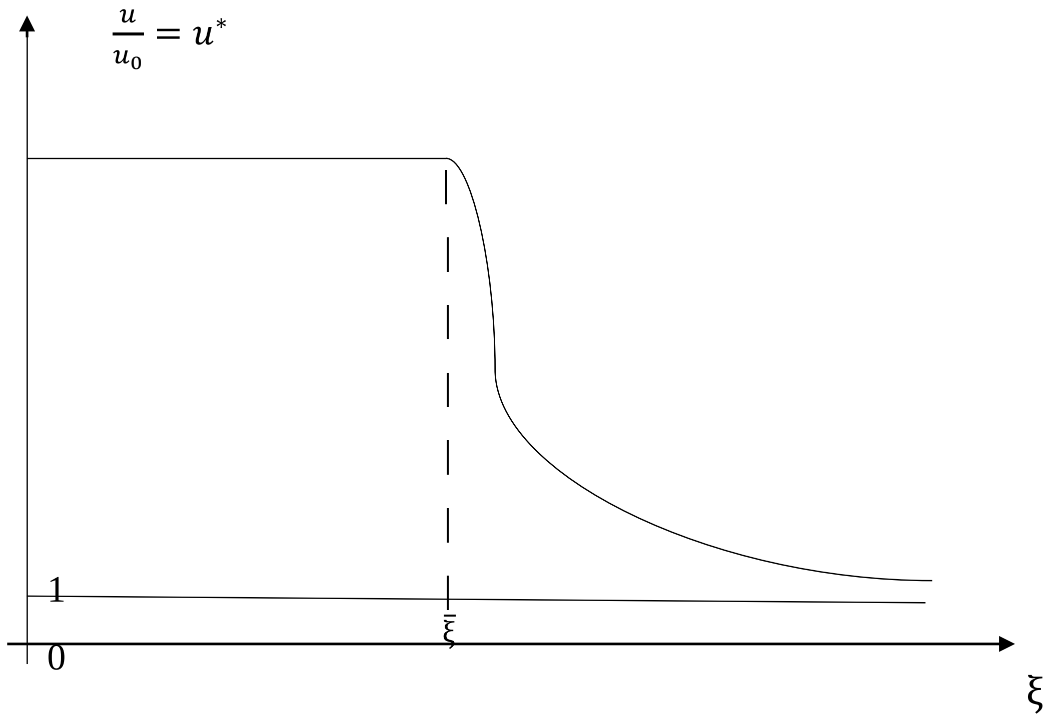
Область искомого корня есть (0; g). Отсюда решая трансцендентное уравнение (27) находим параметр α после этого можно найти $u_1(\xi)$ от 0 до l, а в зоне от l до ∞ определяется $u_2(\xi)$. Трансцендентное уравнение (27) можно решить итерационными методами, например методом Вегстейна [5-7]. В качестве начального приближения берется α_0=0,

а так же для значений $\mu_2 = 0{,}013$ спз, $b = 100$м, $m = 0{,}22$,

$$C_0 = 0{,}20,\ æ = 10^2 \text{м}^2/\text{сек},\quad k_1 = 0{,}7\text{дарси},$$

$$\mu_b = 1\text{сп3},\ \ k_2 = 1\text{дарси.}\ ,\ q = 3 \cdot \frac{10^5 \text{м}^3}{\text{сут}},\ u_0 = 100\text{кг/см}^2$$

проведен численный расчет, результат его приведен на рисунке



Список литературы:

1. Ш.Каюмов. Приближенно-аналитические методы решения задач теории фильтрации вязкопластических флюидов. Ташкент, 1991г. "ФАН." 155 стр.

2. И.А. Чарний и др. Хранение газа в горизонтальных и пологазолежащих водоносных пластах . Москва "Недра" 1968г. 300 стр.

3. Ф.А. Мир-исаев, Ш. Каюмов. Автомодельность решения типовых задач дифференциальных уравнений второго порядка. Журнал "Texnika yulduzlari" 2015г. №1 с. 3-6.

4. Таблицы интегральной показательной функции. Издат. АН СССР. Москва, 1954г.

5. В.И. Ракитин, В.Е. Первушин. Практическое руководство по методам вычислений. Москва. "Высшая школа". 1998г. 383с.

6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений т.I, II, Москва 1962г.

7. А. Бойзоков, Ш. Каюмов, Ҳисоблаш математикаси асослари. Тошкент. ТДХУ. 2000-й. 167б.