УДК 51

ОБ ОДНОМ НОВОМ СПОСОБЕ НАХОЖДЕНИЯ СУММЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики
Гутова Е.В., ст. преподаватель кафедры математики
Николаев Ю.А., студент гр. АГс-161, IV курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В работе рассматривается новый авторский метод для вывода выражения суммы геометрической прогрессии, основанный на алгебраических преобразованиях этой суммы и ее свойствах. Указанная сумма является эталонной (т.е. применяется для сравнения и оценивания других сумм и рядов и ответа на вопрос о их сходимости и скорости этой сходимости) в математическом анализе, что и определяет практическую значимость предложенного метода. Кроме того, новый способ позволяет по-новому взглянуть и на рассматриваемую задачу, и предложить этот же подход к решению проблем более общего характера.

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$b_k = b_1 q^{k-1} \; (k = 1, ..., n), \tag{1}$$

где b_1, q - ее первый член (не равный нулю) и знаменатель, не равный единице.

Пусть

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \; (n = 1, 2, ...) \tag{2}$$

- сумма этой прогрессии. Подставляя выражение (1) в (2), имеем

$$s_n = b_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \; (n = 1, 2, ...). \tag{2'}$$

Меняя в (2') формально n на $m + n$, запишем,

$s_{m+n} = b_1 \sum_{k=1}^{m+n} q^{k-1} = b_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + b_1 \sum_{k=n+1}^{m+n} q^{k-1} = b_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + q^n b_1 \sum_{k=n+1}^{m+n} q^{k-n-1}$ или, в силу (2’), $s_{m+n} = s_n + q^n b_1 \sum_{k=n+1}^{m+n} q^{k-n-1}$. Производя следующую замену $r = k - n = 1, ..., m$ в сумме из правой части последнего равенства, перепишем его в виде:

$s_{m+n} = s_n + q^n b_1 \sum_{r=1}^{m} q^{r-1}$ или, учитывая (2’),

$$s_{m+n} = s_n + q^n s_m \; (m, n = 0, 1, ...). \tag{3}$$

Отметим, что равенство имеет место и при $m = n = 0$.

Меняя в соотношении (3) параметры местами, представим его в следующей форме:

$$s_{n+m} = s_m + q^m s_n \; (n, m = 0, 1, ...) . \qquad (3')$$

Поскольку $s_{m+n} = s_{n+m}$, то из выражений (3) и (3') следует

$s_{m+n} = s_n + q^n s_m = s_m + q^m s_n$ или

$$s_m(q^n - 1) = s_n(q^m - 1) \; (n, m = 0, 1, ...) . \qquad (4)$$

Так как из формулы (2) при $n = 1$ следует, что $s_1 = b_1$, то, полагая в (4), в частности, $m = 1$, запишем

$s_1(q^n - 1) = s_n(q - 1)$ или $b_1(q^n - 1) = s_n(q - 1)$, откуда найдем, в силу (2'),

$$s_n = b_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \; (n = 1, 2, ...; q \neq 1) . \qquad (5)$$

Сделаем несколько замечаний, касающихся формул (4) и (5).

1. Заметим, что при $n = 0$ из формулы (5) следует $s_0 = 0$. Этот же результат формально получим из (2) для $n = 0$, если полагать, что $s_0 = \sum_{k=1}^{0} b_k = 0$.

2. Если $|q| < 1$, то при $m \to +\infty$ из соотношения (4) имеем

$$s(1 - q^n) = s_n \; (n = 0, 1, ...), \qquad (4')$$

где, с учетом формулы (2) и в соответствии с теорией рядов [1], по определению

$s = \lim\limits_{m \to +\infty} s_m = \lim\limits_{m \to +\infty} b_1 \sum_{k=1}^{m} q^{k-1} = b_1 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ - сумма бесконечной геометрической прогрессии. Здесь принято во внимание, что $\lim\limits_{m \to +\infty} q^m = 0$.

3. Заменяя в выражении (5) индекс n на m, запишем

$$s_m = b_1 \sum_{k=1}^{m} q^{k-1} = \frac{b_1(q^m - 1)}{q - 1} \; (m = 1, 2, ...; q \neq 1) . \qquad (5')$$

Подставляя выражения (5) и (5') в соотношение (4), имеем

$\frac{b_1(q^m - 1)}{q - 1}(q^n - 1) = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}(q^m - 1) \; (n, m = 0, 1, ...; q \neq 1)$,

т.е. получили тождественно истинное равенство при $q \neq 1$. Так как при $q = 1$ $q^m = q^n = 1$, то и в этом случае равенство (4) также верно.

4. Сокращая в (5) на $b_1 \neq 0$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{(q^n - 1)}{q - 1} \; (n = 1, 2, ...; q \neq 1) . \qquad (6)$$

Полагая в формуле (6) $q = \frac{a}{b}$, $a \neq b, b \neq 0$, перепишем формулу (6) в виде

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{k-1}=\frac{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n}-1\right)}{\frac{a}{b}-1}\,(n=1,2,...;a\neq b,b\neq 0)$ или, умножая обе части последнего соотношения на $b^{n-1}=\frac{b^n}{b}, b\neq 0$, имеем

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{k-1}b^{n-1}=\frac{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n}-1\right)}{\frac{a}{b}-1}\frac{b^n}{b}\,(n=1,2,...;a\neq b,b\neq 0)$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}b^{n-k}=\frac{a^n-b^n}{a-b}\,(n=1,2,...;a\neq b,b\neq 0). \qquad (7)$$

Из формулы (7) следует

$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}b^{n-k}\,(n=1,2,...)$. Осуществляя замену $m=k-1=0,...,n-1$ (т.е. $k=m+1$) в сумме правой части полученного соотношения, запишем его в виде формулы сокращенного умножения

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{m=0}^{n-1}a^{m}b^{n-1-m}\,(n=1,2,...). \qquad (7')$$

В отличие от формулы (7), равенство (7') справедливо при произвольных значениях a,b.

Если, в свою очередь, в равенстве (7') заменить b на $-b$, полагая при этом, что степень $n=2r+1\,(r=0,1,...)$ - нечетна и принимая во внимание, что $(-b)^n=(-1)^n b^n=(-1)^{2r+1}b^{2r+1}=-b^{2r+1}\,(r=0,1,...)$ и $(-b)^{2r-m}=(-1)^{2r-m}b^{2r-m}=(-1)^m b^{2r-m}\,(m=0,...,n-1;n=1,2,...)$, получим

$a^n-(-b)^n=(a+b)\sum_{m=0}^{n-1}a^m(-b)^{n-1-m}$ или $a^{2r+1}-(-b)^{2r+1}=(a+b)\sum_{m=0}^{2r}a^m(-b)^{2r-m}$, что эквивалентно следующему разложению суммы двух нечетных степеней на сомножители:

$$a^{2r+1}+b^{2r+1}=(a+b)\sum_{m=0}^{2r}(-1)^m a^m b^{2r-m}\,(r=0,1,...). \qquad (7'')$$

В частности, при $r=0$ равенство (7'') обращается в тождественное: $a+b=a+b$. При $r=1$ из равенства (7'') получим формулу разложения суммы двух кубов на сомножители

$a^3+b^3=(a+b)\sum_{m=0}^{2}(-1)^m a^m b^{2-m}=(a+b)(a^0b^2-a^1b^1+a^2b^0)$ или

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Список литературы:

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 2. – М.: Высш. шк., 1988. – 576 с.